ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

На правах рукописи

Аль-Делфи Джавад Кадим Кхалаф

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ГРУПП В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент А.В. Келлер

ЧЕЛЯБИНСК – 2015

Содержание

Обозначения и соглашения **4**

Введение **6**

Глава 1. Квазибанаховы пространства последовательностей и линейные операторы **26**

1.1. Квазибанаховы пространства последовательностей . . . 26

1.2. Линейные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей 29

1.3. Пространства линейных ограниченных операторов . . . 33

1.4. Функции линейных ограниченных операторов 36

Глава 2. Вырожденные голоморфные группы операторов **43**

2.1. Относительно резольвенты 43

2.2. Относительно p-ограниченные операторы 46

2.3. Относительно присоединенные векторы 52

2.4. Разрешающие группы операторов 58

2.5. Порождающие операторы вырожденных голоморфных групп 64

Глава 3. Линейные динамические уравнения соболевского типа **66**

3.1. Задача Коши для неоднородного уравнения 66

3.2. Задача Шоуолтера—Сидорова для неоднородного уравнения 68

3.3. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения 73

3.4. Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина 76

3.5. Уравнение Баренблата–Желтова–Кочиной 79

Список литературы **84**

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+$ — множество $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел,

$W_q^m(\Omega)$ — пространство Соболева,

ℓ_q — пространство последовательностей,

$L_q(\Omega)$ — пространство Лебега,

$\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ — линейная оболочка собственных векторов.

2. Элементы множеств и индексы обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавитов, кроме отображений множеств, называемых операторами и обозначаемых заглавными буквами латинского алфавита, например:

$L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — оператор, действующий из пространства $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$;

$\mathrm{dom} L$ — область определения оператора L.

$L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ — обозначает, что L является линейным ограниченным оператором.

3. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначаются, соответственно, тождественный и "нулевой"операторы, области определения которых ясны из контекста.

4. Символ $\bullet$ лежит в конце доказательства.

5. Все рассуждения проводятся в вещественных квазибанаховых пространствах, однако при рассмотрении спектральных вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением против часовой стрелки и ограничивают область лежащую слева при таком обходе.

Введение

Актуальность темы исследования

Исследования вырожденных голоморфных групп операторов неразрывно связаны с развитием теории уравнений, неразрешенных относительно производной. Впервые такие уравнения начал изучать А. Пуанкаре, однако систематическое их изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева. Именно поэтому в современных математических исследованиях в отношении уравнений неразрешенных относительно производной прочно закрепился термин "уравнения соболевского типа".

Ныне, вырожденные голоморфные группы операторов и уравнения соболевского типа активно изучаемые области функционального анализа и неклассических уравнений математической физики соответственно. В последние десятилетия написано большое количество многографий полностью или частично посвященных этой тематике, сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы. В проблематике выроженных голоморфных групп операторов активно работают Р.Е. Шоуолтер (R.E. Showalter), А. Фавини (A. Favini), А. Яги (A. Yagi), И.В. Мельникова, С.Г. Пятков, Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров.

Термин "голоморфные разрешающие группы" ввел Р.Е. Шоуолтер в [96]. Голоморфные вырожденные группы операторов как разрешающие группы линейных уравнений соболевского типа впервые были изучены Г.А. Свиридюком в [43, 44].

Первая монография, посвященная голоморфным вырожденным

группам и полугруппам, а также вырожденным C_0–полугруппам, вышла в свет в 2003 году [99]. Необходимо отметить, что результаты, изложенные в этой монографии, получены в банаховых пространствах.

Вместе с тем классическими примерами изучения математических объектов заменой одного условия более общим является квазинормированное и квазибанахово пространства.

Квазинормированным пространством $(\mathfrak{U}, {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется линеал $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$ с *квазинормой* ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$, которая отличается от нормы только аксиомой «неравенство треугольника»:

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{U}}\|v\|),$$

где константа $C \geq 1$. Если $C = 1$, то квазинорма становится нормой, а квазинормированное пространство превращается в нормированное. Вообще говоря, квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо [6, гл. 3]. Таким образом, что для квазинормированного пространства корректны понятия фундаментальной последовательности и полноты.

Отметим, что квазинормируемые пространства являются как самостоятельным объектом теоретических исследований [1], [27], так и используются в решении прикладных задач [9].

Полное квазинормированное пространство $\mathfrak{U}$ называется *квазибанаховым*. Любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное — неверно.

Понятие квазибанаховых пространств, по всей видимости, неразрывно связано с понятием банаховых пространств [6, 63]. Однако самостоятельный интерес к квазибанаховым пространствам, как к объ-

екту исследования, появился сранительно недавно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона (N. Kalton) [76], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп [6] и прикладных задач [34], [73].

Известно, что в общем случае в квазибанаховых пространствах не могут быть построены отображения, отличные от нулевого и тождественного [92], например, в пространстве $L_p[a,b]$, $0 < p < 1$. Вместе с тем, это справедливо не для всех квазибанаховых пространств. Так, в пространствах последовательностей ℓ_q, $0 < q < 1$ и построенных на их основе квазисоболевых пространствах ℓ_q^m, $0 < q < 1$, $m \in \mathbb{R}$ существуют линейные отображения, отличные от тривиальных [6, 105]. Подчеркнем, что в данном диссертационном исследовании рассматриваются только такие квазибанаховы пространства, которые в дальнейшем будем называть квазибанаховыми пространствами последовательностей.

Актуализирует исследование вырожденных голоморфных групп операторов в квазибанаховых пространствах тот факт, что полученные ранее, более 20 лет назад, результаты в банаховых пространствах спустя некоторое время оказались применимы в теории динамических измерений [55], в теории оптимального управления [29], теории устойчивости уравнений соболевского типа [39], а также при изучении уравнений соболевского типа высокого порядка [14]. Уравнения соболевского типа возникают при моделировании различных процессов в естественных и технических науках [68], [99]: уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующее динамику вязко-упругой жидкости в трещинновато-пористой среде [5], уравнение эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости,

уравнение волн Россби [41], система уравнений Соболева, линеаризованная система уравнений Навье – Стокса [28], многие другие системы уравнений гидродинамики. Для исследования такого рода прикладных задач при более общих условиях является развитие теории вырожденных голоморфных групп операторов.

Постановка задач

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$(линейный непрерывны, операторы на $\mathfrak{U}$ и действуют в $\mathfrak{F}$). В случае $\mathfrak{U}$= $\mathfrak{F}$ будем использовать $\mathcal{L}(\mathfrak{U}) = \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Отображение $U^\bullet \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ назовем группой операторов, если

$$U^s U^t = U^{s+t}, \tag{0.1}$$

при всех $s, t \in \mathbb{R}$. Обычно группу операторов отождествляют с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем голоморфной, если она аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем (0.1) выполняется при всех $s, t \in \mathbb{C}$. Наконец, голоморфная группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется вырожденной, если ее единица U^0 является проектором в $\mathfrak{U}$.

Будем исследовать разрешающие группы линейного оператора дифференциального уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu, \tag{0.2}$$

где вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ будем называть решением уравнения (0.2), если при подстановке она обращает его в тождество. Решение $u = u(t)$ такого уравнения назовем решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{0.3}$$

если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (0.3) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Рядом исследователей, например в [46], отмечается, что при произвольных начальных данных задача Коши (0.3) неразрешима для уравнения (0.2). Поэтому более целесообразным является рассмотрение задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{0.4}$$

где P — проектор на образ разрешающей группы операторов уравнения (0.2). Отметим, что задача Шоуолтера–Сидорова в невырожденном случае совпадает с задачей Коши, а в вырожденном — может быть решена при произвольных начальных данных.

В работе исследована разрешимость начальных задач (0.3) и (0.4) как для уравнения (0.2), так и для неоднородного уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{0.5}$$

где $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$.

Подчеркнем, что при исследовании задачи (0.3), (0.5) необходимо получение дополнительного условия "согласования начальных данных".

Кроме того, в работе исследована разрешимость начально-конечной задачи [12]

$$P_a(u(a) - u_a) = 0, \qquad P_b(u(b) - u_b) = 0$$

с некоторыми элементами $u_a, u_b \in \mathfrak{U}$ для уравнения (0.5), здесь P_a и P_b — проекторы при некоторых условиях на относительный спектр порождающих операторов группы.

Целью работы является развитие теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах последовательностей с исследованием ее приложений к операторно-дифференциальным уравнениям первого порядка.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Обобщить результаты спектральной теории операторов в квазибанаховы пространства последовательностей;

2. Исследовать относительно ограниченные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей с получением результатов об их свойствах;

3. Обобщить результаты теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховы пространства последовательностей;

4. Исследовать разрешимость задачи Коши, задачи Шоуолтера–Сидорова, начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа с использованием теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Историография проблематики

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (0.2) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$\dot{u} = Su, \qquad \dot{f} = Tf, \tag{0.6}$$

где операторы $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, и $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Уравнения (0.2) будем рассматривать в рамках уравнения

$$\dot{v} = Bv, \tag{0.7}$$

где оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{J})$, вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{J})$–решением уравнения (0.7), а $\mathfrak{J}$ — банахово пространство.

Уравнения (0.7) удобно исследовать в терминах теории групп операторов. Следовательно, существует голоморфная группа уравнения (0.7), представимая интегралами Данфорда–Тейлора

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu(B) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R}, \tag{0.8}$$

где $R_\mu(B) = (\mu\mathbb{I} - B)^{-1}$ —резольвента оператора B, и $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$— контур, ограничивающий область, содержащую спектр $\sigma(B)$ оператора B.

Отметим из уравнения (0.6), что оператор $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ тогда и только тогда, когда оператор $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, причем $\sigma(S) = \sigma(T)$. Тогда из существования оператора $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ следует существование разрешающих групп уравнения (0.2), которые к тому же имеют вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu(S) e^{\mu t} d\mu, \qquad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\mu(T) e^{\mu t} d\mu, \tag{0.9}$$

где $t \in \mathbb{R}$, а $\gamma \in \mathbb{C}$ — контур, ограничивающий область, содержащую спектр $\sigma(S)$ (или $\sigma(T)$).

В классической теории разрешающих семейств операторов в банаховых пространствах можно выделить три основных случая, когда семейство является: 1) полугруппой сильно непрерывных операторов; 2) полугруппой голоморфных операторов; 3) группой голоморфных операторов. Развитие теории разрешающих полугрупп неразрывно связано с исследованием решений операторно–дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

В первом, самом непростом, случае классическим результатом о разрешимости уравнения (0.7) является теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса (теорема ХИФМФ) [53], устанавлива-

ющая биекцию между множеством разрешающих полугрупп операторов и множеством операторов, называемых генераторами этих полугрупп (развитие этой теории см., например, в [91]). Во втором — аналогичный результат сформулирован в теореме Соломяка–Иосиды [103] (отметим также работы [22, 23, 52]). Наконец, в третьем случае подобная взаимосвязь является следствием применения преобразования Лапласа [10, 25].

В свое время полу(группы) уравнения (0.2) в банаховых пространствах рассматривались разным авторами [31, 45, 71, 102]. При этом исследователи отмечали, что характерной чертой (полу) группы уравнения с вырожденным операторов является то, что единицей полугруппы является не тождественный оператор, как в классической теории полугруппы операторов, а проектор на некоторое подпространство. Этот факт, в частности, влечет то, что задача Коши разрешима не для произвольных начальных данных. Такие полугруппы в дальнейшем называется вырожденным, либо полугруппами операторов с ядрам.

Так, разрешимость задачи (0.2),(0.3) изучали математики школы С.Г. Крейна. Продолжая традицию, заложенную в работах К. Вейерштрасса и Л. Кронекера, для исследования разрешимости этой задачи они использовали понятие регулярности операторного пучка $M + \mu L$. (Пучок $M + \mu L$ называется регулярным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow ((M + \mu L)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}))).$$

С.Г. Крейн и В.Б. Осипов [26], рассматривая однородную задачу с линейными ограниченными операторами L, M в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$, использовали метод, предложенный С.Г. Крейном и

С.Д. Эйдельманом, который основан на построении функции Ляпунова. Показано, что если, в отличие от оператора L, оператор M и (или) при некотором μ оператор $M + \mu L$ обратимы, то решения однородного уравнения (0.2) заполняют некоторое собственное подпространство, в котором задача Коши однозначно разрешима.

С.П. Зубовой и К.И. Чернышовым [15] исследован случай, когда $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, L – замкнутый фредгольмов, M – ограниченный оператор. Для регулярного случая ими доказана однозначная разрешимость однородной задачи Коши при начальных значениях из некоторого подпространства с конечным дефектом. Также показано, что решение неоднородной задачи Коши (0.3),(0.5) существует для достаточно гладких функций $f(t)$, определенным образом согласованных с начальными данными. В сингулярном случае решение однородной задачи неединственно и существует только при начальных данных, удовлетворяющих счетному числу условий, а для разрешимости неоднородной задачи от $f(t)$ требуется бесконечная гладкость и выполнение счетного числа условий согласования с начальными данными.

Используя методы классического и локального преобразования Лапласа и спектральную теорию операторных пучков, А.Г. Руткас [36] исследовал задачу (0.3),(0.5) в случае, когда $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, L, M – линейные ограниченные операторы. В статье охарактеризованы нормальные решения, корректная и диссипативная задача Коши, описано начальное многообразие при различных условиях. Результаты исследования применяются к задачам рассеяния и прохождения сигналов в дискретных структурах.

Отметим, что преобразование Лапласа является распространен-

ным методом построения разрешающих семейств операторов [3, 4, 36, 37, 59, 69]. Поэтому также интересны результаты спектральной теории, как сами по себе [33], так и с точки зрения построения разрешающих семейств [54].

A. Favini [69] вводит в рассмотрение задачу

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + f(t) \quad (0 < t < \infty)$$

$$\lim_{t\to 0+} Lu(t) = u_0$$

с замкнутыми линейными операторами L, M. В [70] он рассматривает то же уравнение на конечном отрезке $[0, T]$ с начальным условием $Lu(0) = Lu_0, \quad \mathrm{dom}L \supseteq \mathrm{dom}M \ni u_0, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. В терминах оператора $M(\mu L - M)^{-1}$ сформулированы теоремы существования и единственности решения этих задач при некоторых условиях на начальное значение u_0 и гладкость функции $f(t)$.

Обобщение классической теории идет сразу по нескольким направлениям. Одно из них – получение некоторых семейств операторов, дающих решение уравнения (0.2) в более общем смысле. Введение понятий экспоненциально ограниченной, n раз интегрированной и локальной n раз интегрированной полугрупп $\{V^t : t \geq 0\}$ [32, 59] позволило в случае, когда задача Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (0.2) некорректна, но оператор A порождает такую полугруппу, получить решение этой задачи

$$v(t) = \frac{d^n V^t}{dt^n} v_0, \quad v_0 \in \mathrm{dom}A^n,$$

устойчивое относительно изменения v_0 по норме $\|v_0\|_n = \|v_0\|_\nu + \|Av_0\|_\nu + \cdots + \|A^n v_0\|_\nu$ (так называемая, $n - \omega$-корректность). В

работе [32] устанавливается взаимно однозначная связь между существованием интегрированной полугруппы и существованием обобщенного решения задачи Коши для уравнения (0.7). В [59] W. Arendt обобщил теорему ХИФФМ на случай n раз интегрированных полугрупп.

Определив экспоненциально ограниченную C-полугруппу [32, 59, 67, 78] $\{V^t : t \geq 0\}$, удалось получить решение $v(t) = C^{-1}V^t v_0$ задачи Коши для уравнения (0.7) в случае, когда оператор A является генератором C-полугруппы. Это решение получено для $v_0 \in C[\mathrm{dom}A]$ и устойчиво относительно нормы $\|v_0\|_{C^{-1}} = \|v_0\|_{\mathfrak{U}} + \|C^{-1}v_0\|_{\mathfrak{U}}$. Отметим, что для C-полугрупп также доказан аналог теоремы ХИФФМ.

В 60-е годы в работах [31, 32, 82] появилось понятие регулярной полугруппы распределений, и было доказано, что существование ее является необходимым и достаточным условием обобщенной корректности. Более подробно эти семейства операторов рассмотрены в монографии И.В. Мельниковой и А.И. Филинкова [88], в частности, в ней показана схема связей между генераторами различных классов полугрупп уравнения (0.7).

Отметим также распространение теории C_0-полугрупп на пространства Степанова [21, 24], которые позволяют рассматривать более широкое множество операторов в уравнениях вида (0.7). В настоящее время в г. Воронеже усилиями В.А. Костина создана математическая школа, представители которой изучают пространства Степанова и C_0-полугруппы с особенностями в различных аспектах.

Далее, теория групп операторов в банаховых пространствах [2, 8, 11, 20, 25, 53, 91] была распространена на локально выпуклые пространства. При этом теория равностепенно полугрупп операторов в

локально выпуклых пространствах (Л. Шварц [94], H. Komatsu [81], K. Yosida [103]) оказалась очень близка к теории полугрупп в банаховых пространствах: в обоих случаях основным языком и методом исследования служит резольвента производящего оператора полугруппы.

Однако, как показывают некоторые примеры, в случае локально выпуклых пространств равностепенная непрерывность полугруппы не является таким же естественным условием, как в случае банаховых пространствах, в частности она не следует из сильной непрерывности полугруппы. Чего нельзя сказать об условии локальной равностепенной непрерывности. Полугруппы, удовлетворяющие этому условию, рассматривались многими авторами [16, 17, 82, 90]. При этом было замечено, что даже в достаточно простых случаях резольвента генератора такой полугруппы может не существовать ни в одной точке.

В работе T. Komura [82] роль резольвенты в теореме о порождении локально равностепенно непрерывной полугруппы класса C_0 играет достаточно сложное понятие обобщенной резольвенты. В.В. Иванов [16] и S. Ouchi [90] использовали для описания характеристик порождающих операторов одинаковую [16], более прозрачную конструкцию, названную n-резольвентой (позже — квазирезольвентой [16, 17]) и асимптотической резольвентой [90].

Заметим, что впоследствии В.В. Иванову удалось упростить понятие квазирезольвенты, отказавшись от априорного требования ее коммутирования с генератором. Кроме того, им были исследованы не только C_0-непрерывные полугруппы, но и равномерно суммируемые, а в работе [16] была проведена весьма общая классификация

полугрупп операторов в локально выпуклых пространствах и исследованы соответствующие классы полугрупп. Отметим также работы о локально равностепенно непрерывных C_0-непрерывных полугруппах [30, 89].

Многие понятия теории полу(групп) изучены в локально выпуклых пространствах [20, 52]. Теоремы о порождении сильно голоморфных и сильно непрерывных полугрупп, а также сильно непрерывных групп в локально выпуклых пространствах доказаны в [103]. В работах В.Е. Федорова [49, 50] были рассмотрены вопросы порождения равностепенно непрерывных полугрупп четырех различных классов гладкости (0.2): сильно голоморфных в плоскости, сильно голоморфных в секторе полугрупп и сильно непрерывных полу(групп) операторов. В названных работах сформулированы результаты о существовании разрешающих семейств операторов в максимальной степени общности для локально выпуклых пространствах и пространств Фреше, которые являются проективными пределами пространств Соболева.

В данной работе сделаны первые шаги по формированию теории вырожденных разрешающих семейств операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей с рассмотрением случая относительно ограниченных операторов, причем возможность вырожденности оператора при производной рассматривается для большей общности.

Методы исследования

В данной работе для построения теории вырожденных голоморф-

ных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных операторов, спектральной теории.

Для построения операторов разрешающих групп, по аналогии с классическими результатами, используется преобразование Лапласа оператор-значных функций в квазибанаховых пространствах последовательностей, для чего необходимо обоснование существования в квазибанаховых пространствах последовательностей аналитичности отображения и интегрирования для таких отображений. В основе этого обоснования лежит метризуемость квазибанаховых пространств последовательностей.

Трудности, связанные с наличием ядер у разрешающих операторов, преодолеваются за счет того, что оба пространства, в которых действуют операторы, представимы в виде прямых сумм ядер и образов разрешающих групп (точнее, их единиц). При этом действие операторов L и M распадается в соответствии с расщеплением пространств (из ядра – в ядро, из образа – в образ), на ядре полугруппы оказывается обратимым сужение оператора M, а на образе – сужение оператора L. Тем самым исходное уравнение (или задачи Коши, Шоуолтера–Сидорова или начально-конечной задачи для него) редуцируется к системе двух уравнений (двух задач Коши, Шоуолтера–Сидорова), а для начально-конечной задачи к системе из трех уравнений, заданных на взаимно дополнительных подпространствах. Уравнение на образе имеет вид первого уравнения из (0.6), при этом оператор S является инфинитезимальным генератором уже невырожденной группы соответствующего класса, и иссле-

дование его разрешимости и свойств его решений проводится классическими методами. Другое уравнение принимает вид

$$H\dot{u}(t) = u(t) + v(t),$$

и получить его решение в явном виде и, соответственно, исследовать его свойства позволяет нильпотентность оператора H, автоматически следующая из условия (L, p)-ограниченности оператора M.

Новизна полученных результатов

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Построена относительно спектральная теория операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.

2. Построена теория относительно ограниченных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Построены относительные резольвенты, рассмотрены их свойства, построены относительно присоединенные векторы. Доказана теорема о расщеплении действия операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей в относительно ограниченном случае.

3. Доказана теорема о существовании голоморфных разрешающих вырожденных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей, а также исследованы свойства порождающих операторов для этих групп.

4. Полученные результаты теории голоморфных вырожденных групп операторов применены к исследованию разрешимости начальных и начально конечной задач для одного класса вырожденных операторных уравнений.

5. В работе построен квазиоператор Лапласа и рассмотрены ква-

зисоболевы пространства для рассмотрения аналога известного неклассического уравнения математической физики — уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной — в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии теории вырожденных голоморфных групп операторов, получении ряда обобщающих результатов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Это исследование становится отправной точкой для развитии теории вырожденных голоморфных полугрупп операторов. Кроме того, получение теоретической базы позволяет не только начать исследования неклассических уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей и различных задач для такого рода уравнений, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Именно возможность приложения полученных теоретических результатов к различным областям научных исследований позволяет говорить о практической значимости исследования. В диссертации приведены лишь отдельные примеры такого рода приложений.

Апробации

Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на:

– Международных научных конференциях "Измерения: состояние, перспективы развития" (Челябинск, 2012), "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближе-

ний" (Новосибирск, 2013) [112],

– Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014) [111],

– Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2014) [109],

– Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Челябинск, 2014) [110],

– научных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ "Технические науки. Естественные науки. Социально-гуманитарные науки. Экономика. Управление. Право." (Челябинск, 2013, 2014, 2015)

– семинаре профессора Г.А. Свиридюка "Уравнения соболевского типа" в Южно-Уральском государственном университете.

Результаты диссертации опубликованы в работах [104] – [112].

Необходимо отметить, что во всех работах [104] – [107], выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит только постановка задачи и некоторые идеи доказательств. Все доказательства выполнены автором диссертации самостоятельно.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность исследования, определены цель и задачи исследования, дана историография проблематики исследования, представлены новизна и методы исследования, теоретическая и практическая значимость результатов.

Первая глава содержит результаты, относящиеся к предварительным сведениям. Результаты, сформулированные в этой главе не

выносятся на защиту. Вместе с тем, здесь приведены доказательства ряда необходимых результатов, которые в известной литературе приводятся без доказательств. В первом параграфе приведены определения и понятия, связанные с квазибанаховыми пространствами последовательностей. Доказана теорема о вложениях. Во втором параграфе приводится понятие ограниченных и непрерывных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Введены операции над этими операторами и показано, что непрерывность и ограниченность эквивалентны в квазибанаховых пространствах последовательностей. Доказан аналог теоремы Банаха об обратном операторе. В третьем параграфе рассматривается пространство линейных ограниченных операторов. Доказана теорема о продолжении плотно определенного линейного оператора на все пространство. Кроме того показано, что пространство линейных ограниченных операторов также образует квазибанахово пространство последовательностей. Наконец в последнем, четвертом параграфе первой главы рассматриваются функции линейных ограниченных операторов. А именно, доказана теорема об обратимости близкого к единичному оператору, показано, что этот обратный имеет вид ряда и приводится радиус его сходимости. Аналогично введены понятия резольветного множества и спектра линейного непрерывного оператора, а также резольвента этого оператора, представимая в виде ряда. Интегрирование по замкнутому контуру в комплексной плоскости для аналитических вектор-функций со значениями в квазибанаховом пространстве последовательностей введено с использованием вычетов.

Вторая глава диссертации посвящена вырожденным голоморфным группам операторов в квазибанаховых пространствах. В первом

параграфе построены относительные резольвенты в квазибанаховых пространствах последовательностей и исследованы их свойства. Во втором параграфе доказана теорема о расщеплении и введено понятие (L, p)-ограниченных операторов. Третий параграф содержит сведения об относительно присоединенных векторах и их свойствах. Доказана теорема о связи между максимальной длиной цепочки присоединенных векторов и порядком полюса относительной резольвенты в бесконечно удаленной точке. Наконец, в четвертом параграфе сформулирован и доказан один из основных результатов диссертации, а именно, существование вырожденной голоморфной группы операторов для однородного уравнения соболевского типа. Пятый параграф этой главы содержит результаты о порождающих операторах вырожденной голоморфной группы.

Третья глава содержит приложения полученных теоретических результатов. В первом параграфе рассмотрена задача Коши для неоднородного уравнения соболевского типа с относительно ограниченным оператором в квазибанаховых пространствах последовательностей. Приводится условие "согласование начальных данных". Во втором параграфе строится решение задачи Шоуолтера–Сидорова для неоднородного уравнения соболевского типа. В третьем параграфе строится решение начально-конечной задачи для неоднородного уравнения соболевского типа. В четвертом параграфе построен квазиоператор Лапласа и рассмотрены квазисоболевы пространства. В пятом параграфе рассматривается аналог уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах на основе построенного в четвертом параграфе квазиоператора Лапласа. Получен результат о разрешимости начальных и начально-конечной задач

для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Результаты относительно спектральной теории операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.
2. Результаты теории относительно ограниченных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.
3. Теоремы о существовании голоморфных вырожденных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.
4. Теоремы о разрешимости задач Коши, Шоуолтера–Сидорова и начально-конечной задачи для неоднородного уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах последовательностей.
5. Построение квазиоператора Лапласа и квазисоболевых пространств.
6. Построение аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах.

1. Квазибанаховы пространства последовательностей и линейные операторы

1.1. Квазибанаховы пространства последовательностей

Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторый вещественный линеал; упорядоченная пара $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow\ u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ \ {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит ни от u, ни от v. Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ еще и нормой. Таким образом, понятия квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линеалом $\mathfrak{U}$.

Квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathfrak{U} :\ {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В случае $C = 1$ это топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) = {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\|$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C > 1$.

Лемма 1.1.1. (лемма 3.10.1 [6]). *Пусть $\mathfrak{U}$ – квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^\alpha = 2$. Тогда на $\mathfrak{U}$ существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $u \in \mathfrak{U}$*

$$d(\mathbf{0}, u) \leq {}_{\mathfrak{U}}\|u\|^\alpha \leq 2d(\mathbf{0}, u). \tag{1.1.1}$$

Из леммы 1.1.1 вытекает, что мы располагаем понятием *фунда-*

ментальной последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U} : \lim\limits_{n,l\to\infty} {}_{\mathfrak{U}}\|u_n - u_l\| = 0$, а значит, и понятием полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым.* Предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ будем обозначать символом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Пример 1.1.1. Пространства последовательностей ℓ_q, $q \in \mathbb{R}_+$ банаховы при $q \in [1, +\infty)$ и квазибанаховы при $q \in (0, 1)$. Во втором случае $C = 2^{1/q}$.

Пространства последовательностей ℓ_q при $q \in (0, 1)$ будем называть *квазбанаховыми пространствами последовательностей.*

Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение *квазисоболевы пространства*

$$\ell_p^m = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p \right)^{1/p},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — два квазибанаховых пространства последоваетльностей. Будем говорить, что

— $\mathfrak{U}$ *вложено в* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{U}$ *плотно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq C \cdot {}_{\mathfrak{F}}\|u\|$, где $C \in \mathbb{R}_+$ — некоторая константа, не зависящая от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.1. *При всех* $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, *имеют место плотные и непрерывные вложения* $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$ и $u \in \ell_p^m$, $0 < p < 1$, тогда

$$u \in \left\{ \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p < \infty \right\}.$$

Возьмем, $u_k = \lambda_k^{-r} v_k$, где $r \in \mathbb{R}$, тогда получим

$$u \in \left\{ \{v_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{l}{2}} |v_k|)^p < \infty, \text{ где } l = m - r \right\} = \ell_p^l.$$

Далее,

$${}_p^l\|u\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{l}{2}} |v_k|)^p = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p \cdot (1/\sqrt{\lambda_k})^{rp} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^p \cdot \sup_k (1/\sqrt{\lambda_k})^{rp}$$

Отсюда,

$${}_p^l\|u\| \leq {}_p^m\|u\| \cdot (\sup_k (1/\sqrt{\lambda_k})^{rp})^{1/p}$$

Если положим, $C = (\sup\limits_k (1/\sqrt{\lambda_k})^{rp})^{1/p}$, получим ${}_p^l\|u\| \leq C \cdot {}_p^m\|u\|$.

Поэтому, ℓ_p^m непрерывно вложено в ℓ_p^l. Докажем теперь плотность вложения. Пусть $u \in \ell_p^l$, тогда рассмотрим последовательность $\{u_n\}$,

где

$$u_1 = (u_1, 0, 0, \ldots),\ u_2 = (u_1, u_2, 0, 0, \ldots),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ u_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

Очевидно, $\{u_n\} \subset \ell_p^m$, причем $u_n \to u$ в квазинорме l_p^l. •

1.2. Линейные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей

Теперь пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\Big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\Big)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$${}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \le K \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|,$$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Лемма 1.2.1. (лемма о локальной непрерывности [74]). *Пусть* $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}; d_1)$ *и* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; d_2)$ *два метрических пространства и оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *отображающий пространство* $\mathfrak{U}$ *в пространство* $\mathfrak{F}$*, определенный в окрестности точки* $u_0 \in \mathfrak{U}$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) L *непрерывное отображение в точке* $u_0 \in \mathfrak{U}$*, т.е.*

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall u \in \mathfrak{U} \quad d_1(u, u_0) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(Lu, Lu_0) < \varepsilon;$$

(ii) *прообраз открытого в* $\mathfrak{F}$ *множества открыт в* $\mathfrak{U}$;

(iii) *для любой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ *такой, что* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$*, последовательность* $\{Lu_n\}$ *является сходящейся в* $\mathfrak{F}$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\Big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\Big)$.

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что dom L=$\mathfrak{U}$ является линеалом, который мы обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. На этом линеале определим неотрицательную функцию

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Теорема 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ такой, что* dom L=$\mathfrak{U}$*, непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Когда $L = \mathbb{O}$, утверждение леммы тривиально. Если $L \neq \mathbb{O}$, то $_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| \neq \mathbb{O}$. Допустим, L-ограниченный линейный оператор, и рассмотрим любую точку $u_0 \in \mathfrak{U}$. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, тогда, так как L линейный оператор, то для любой точки $u \in \mathfrak{U}$, такой что $_{\mathfrak{U}}\|u - u_0\| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\|}$, получим

$$_{\mathfrak{F}}\|Lu - Lu_0\| = {}_{\mathfrak{F}}\|L(u - u_0)\| <$$

$$<_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})} \|L\| \; _{\mathfrak{U}}\|u - u_0\| <_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})} \|L\| \; \delta = \varepsilon.$$

Поскольку u_0 точка была произвольной, L будет непрерывным оператором.

Обратно, допустим L непрерывный линейный оператор в произвольной точкой $u_0 \in \mathfrak{U}$, это значит

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \; _{\mathfrak{F}}\|Lu - Lu_0\| < \varepsilon,$$

где для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполняется $_{\mathfrak{U}}\|u - u_0\| < \delta$. Теперь пусть v ненулевая точка в $\mathfrak{U}$ и положим $u = u_0 + \frac{\delta}{_{\mathfrak{U}}\|v\|} v$. Тогда,

$$_{\mathfrak{F}}\|Lu - Lu_0\| = {}_{\mathfrak{F}}\|L(u - u_0)\| =$$

$$= {}_{\mathfrak{F}}\|L(\frac{\delta}{{}_{\mathfrak{U}}\|v\|}\ v)\| = \frac{\delta}{{}_{\mathfrak{U}}\|v\|}\ {}_{\mathfrak{F}}\|Lv\| < \varepsilon,$$

отсюда следует, что ${}_{\mathfrak{F}}\|Lv\| < \frac{\varepsilon}{\delta}\ {}_{\mathfrak{U}}\|v\|$. Положим $K = \frac{\varepsilon}{\delta}$, получим ${}_{\mathfrak{F}}\|Lv\| < K\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|v\|$. Таким образом, L ограниченный линейный оператор. •

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $T : \mathfrak{V} \to \mathfrak{F}$ и $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, тогда формулой

$$Mu = T(Lu) \qquad (u \in \mathfrak{U})$$

определяется оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, который называется *композицией* операторов T и L ($M = TL$).

Лемма 1.2.2. *Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ и $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, тогда оператор M ограничен, т.е. $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, и*

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|M\| = {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|TL\| \le {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|.$$

Утвеждение леммы, в силу определению квазинормы, очевидно следует из оценки

$${}_{\mathfrak{F}}\|Mu\| = {}_{\mathfrak{F}}\|T(Lu)\| \le {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathfrak{V}}\|Lu\| \le {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|_{\mathfrak{U}}\|u\|.$$

Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *обратимым*, если существует оператор $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, такой что $L^{-1}L = \mathbb{I}_{\mathfrak{U}}$, $LL^{-1} = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$. Обратимый оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *непрерывно обратимым*, если $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Непрерывный оператор называется *топлинейным изоморфизмом*, если $\mathrm{dom}\ L^{-1} = \mathfrak{F}$.

Теорема 1.2.2. (аналог теоремы Банаха). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{F}$ *— квазибанаховы пространства последовательностей, тогда биективный оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *— топлинейный изоморфизм.*

Доказательство. Необходимо доказать, что $\operatorname{dom} L^{-1} = \mathfrak{F}$, чтобы доказать, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – *топлинейный изоморфизм.* Очевидно, $\operatorname{dom} L^{-1} \subset \mathfrak{F}$. Докажем, что $\mathfrak{F} \subset \operatorname{dom} L^{-1}$. Пусть $\{v_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{F}$, тогда $\{v_n\} \to v$ в $\mathfrak{F}$, где $v \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство.

По биективности оператора L, $\operatorname{im} L = \mathfrak{F}$. Положим $v_n = Lu_n$ и $v = Lu$, где $\{u_n\}$, $u \in \operatorname{dom} L$, тогда $\{Lu_n\} \to Lu$, когда $\{u_n\} \to u$, потому что L непрерывный оператор. Поскольку $\operatorname{dom} L^{-1} = \operatorname{im} L$, тогда $\{v_n\} = \{Lu_n\} \in \operatorname{dom} L^{-1}$, следовательно, $\mathfrak{F} \subset \operatorname{dom} L^{-1}$.

Таким образом, $\operatorname{dom} L^{-1} = \mathfrak{F}$ и оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ топлинейный изоморфизм.•

Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Введем в рассмотрение *квазиоператор Лапласа* $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$.

Теорема 1.2.3. *При всех* $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$ *квазиоператор Лапласа* $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ *— топлинейный изоморфизм.*

Доказательство. Непрерывность оператора Λ очевидна –

$$ {}_p^m\|\Lambda u\| \;=\; \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)-1} |u_k|^p\right)^{1/p} = {}_p^{m+2}\|u\|, $$

где $\|\Lambda\| = 1$. Построим обратный оператор $\Lambda^{-1}u = \lambda_k^{-1}u_k$ (*квазиоператор Грина*). Очевидно, $\Lambda\Lambda^{-1}u = u$ при всех $u \in \ell_p^m$, и $\Lambda^{-1}\Lambda u = u$

при всех $u \in \ell_p^{m+2}$. Далее,

$$ {}_p^{m+2}\|\Lambda^{-1}u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)+1}|u_k|^p\right)^{1/p} = {}_p^{m}\|u\|, $$

где $\|\Lambda^{-1}\| = 1$. Таким образом, оператор Λ будет топлинейным изоморфизмом. •

1.3. Пространства линейных ограниченных операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — линеал всех линейных ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.3.1. (теорема о продолжении) *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Любой линейный непрерывный оператор $L : \operatorname{dom} L \to \mathfrak{F}$ с плотной областью определения ($\overline{\operatorname{dom} L} = \mathfrak{U}$) можно продолжить, и при том единственным образом, до линейного непрерывного оператора $\widetilde{L} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, определенного на всем пространстве $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $u_0 \in \mathfrak{U}$. Тогда существует последовательность $\{u_n\} \subset \operatorname{dom} L$, такая, что $u_n \to u_0$. Тогда в силу пункта (iii) леммы 1.2.1 последовательность $\{Lu_n\}$ фундаментальна и существует $f_0 \in \mathfrak{F}$, такой что $\{Lu_n\} \to f_0$. Причем, в силу той же леммы этот предел не зависит от выбора последовательности. Положим $\widetilde{L}u_0 = f_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Lu_n$ и таким образом доопределим по непрерывности оператор L.

Покажем непрерывность оператора $\widetilde{L}$. Пусть $u_0, u_0' \in \mathfrak{U}$, тогда

$u_n \to u_0$, $u'_n \to u'_0$, $u_n, u'_n \in \operatorname{dom} L$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $v' \in \operatorname{dom} L$ по любому $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы для любых $v \in \operatorname{dom} L$ с условием ${}_{\mathfrak{U}}\|v' - v\| < \delta$ выполнялось ${}_{\mathfrak{F}}\|Lv' - Lv\| < \varepsilon$. Если ${}_{\mathfrak{U}}\|u'_0 - u_0\| < \delta$, то для достаточно больших номеров n выполнено ${}_{\mathfrak{U}}\|u'_n - u_n\| < \delta$ и, следовательно,

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|Lu'_n - Lu_n\| < \varepsilon. $$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим ${}_{\mathfrak{F}}\|\widetilde{L}u'_0 - \widetilde{L}u_0\| \le \varepsilon$. То есть оператор $\widetilde{L}$ непрерывен на $\mathfrak{U}$.

Единственность такого продолжения следует из единственности предела. В дальнейшем такое продолжение будем обозначать также как исходный оператор. •

Лемма 1.3.1. *Функция* ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \to \mathbb{R}_+$ *— квазинорма.*

Доказательство. Необходимо показать выполнение аксиом квазинормы.

(i) Поскольку ${}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \ge 0\ \forall u \in \mathfrak{U}$, ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \ge 0$, и ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| = 0 \Leftrightarrow Lu = \mathbf{0}\ \forall u \in \mathfrak{U} : {}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 1 \Leftrightarrow L = \mathbb{O}$.

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\alpha L\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|\alpha Lu\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} |\alpha|\, {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| =$

$$ = |\alpha| \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| = |\alpha| \cdot {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\|. $$

(iii) $\forall L, T \in \mathfrak{U}$ ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L + T\| = \sup\limits_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|(L+T)u\| =$

$$ = \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu + Tu\| \le \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} (C({}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| + {}_{\mathfrak{F}}\|Tu\|)) \le $$

$$ \le C \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| + C \sup_{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Tu\| = C({}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| + {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|T\|). \bullet $$

Теорема 1.3.2. *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, тогда $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — квазибанахово пространство с квазинормой ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\|$.*

Доказательство. Пусть $\{L_k\}$ – фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, т.е. ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L_l\| \to 0$ при $k, l \to \infty$.

Возьмем $u \in \mathfrak{U}$ и покажем, что $\{L_k u\}$ – фундаментальная последовательность в $\mathfrak{F}$, т.е.

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - L_l u\| = {}_{\mathfrak{F}}\|(L_k - L_l)u\| \leq $$

$$ \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L_l\| \, {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \to 0 \quad \forall k, l \to \infty. $$

Поскольку $\mathfrak{F}$ полное квазинормированное пространство, то последовательность $\{L_k u\}$ сходится к некоторой точке этого пространства. Поэтому, в силу теоремы 1.3.1, можно доопределить оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, где $Lu = \lim\limits_{k\to\infty} L_k u$. Необходимо доказать, что L ограниченый линейный оператор:

$$ \forall\ u, v \in \mathfrak{U} \ \ L(\alpha u + \beta v) = \lim_{k\to\infty} L_k(\alpha u + \beta v) = $$

$$ = \lim_{k\to\infty} (\alpha L_k u + \beta L_k v) = \alpha L u + \beta L v, $$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Так как $\{L_k\}$ – фундаментальная последовательность, то она ограничена, и тогда

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| = \lim_{k\to\infty} {}_{\mathfrak{F}}\|L_k u\| \leq \lim_{k\to\infty} {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k\| {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \leq K \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|, $$

следовательно, L – ограниченый линейный оператор.

Далее, поскольку $\{L_k\}$ – фундаментальная последовательность,

$$ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall\ k,\ l \in \mathbb{N}\ (k,\ l > N) \Rightarrow {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L_l\| < \varepsilon, $$

тогда по определению квазинормы в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$

$$\forall\ u \in \mathfrak{U}\ \ {}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - L_l u\| < \varepsilon \cdot_{\mathfrak{U}} \|u\|.$$

Перейдем к пределу при $l \to \infty$

$$\lim_{l\to\infty} {}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - L_l u\| \le \varepsilon \cdot_{\mathfrak{U}} \|u\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - Lu\| \le \varepsilon \cdot_{\mathfrak{U}} \|u\|.$$

Откуда в силу непрерывности квазинормы при любом $u \in \mathfrak{U}$, получим ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L\| \le \varepsilon$, т.е. $L_k \to L$. Таким образом, $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – квазибанахово пространство. •

1.4. Функции линейных ограниченных операторов

Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последоваетльностей, $\mathcal{L}(\mathfrak{F})(\equiv\ \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F}))$ — квазибанахово пространство линейных ограниченных операторов.

Теорема 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$. Тогда оператор $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и*

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|T^{-1}\| \le \frac{C}{1 - C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|M\|},$$

где C — константа из определения квазинормы.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ линейных ограниченных операторов ряд

$$\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} + M + M^2 + M^3 + \dots. \tag{1.4.1}$$

Докажем, что этот ряд сходится абсолютно и его сумма S есть оператор, обратный к T.

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}+M+M^2+M^3+\ldots\| \leq C\left(_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}\| + _{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M+M^2+M^3+\ldots\|\right) \leq$$

$$\leq C\left(_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}\| + C\left(_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| + _{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^2+M^3+\ldots\|\right)\right) \leq \ldots$$

$$\leq C_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}\| + C^2{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| + C^3{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^2\| + C^4{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^3\| + \ldots \leq$$

$$\leq C_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}\| + C^2{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| + C^3{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|^2 + C^4{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|^3 + \ldots,$$

где последнее неравенство справедливо в силу $_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^k\| \leq _{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|^k$ (лемма 1.2.2).

А в силу условия $_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$ получим сходящийся мажорирующий ряд

$$C_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}\|+C^2{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|+C^3{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|^2+C^4{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|^3+\ldots = \frac{C}{1-C\cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|}.$$

В силу теоремы 1.3.2, пространство $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ полное, а следовательно ряд (1.4.1) сходится к $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и

$$S \leq \frac{C}{1-C\cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|}.$$

Пусть $S_n = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} + M + M^2 + \ldots + M^n$ — частичная сумма ряда (1.4.1). Тогда $S(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M^{n+1}) = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$.

Аналогично, $(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M)S = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M^{n+1}) = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$. •

Определение 1.4.1. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, если существует оператор $R_\lambda(M) = (\lambda\mathbb{I} - M)^{-1}$ (*резольвента* оператора M). Множество регулярных точек $\rho(M)$ оператора M называется *резольвентным множеством* оператора M.

Определение 1.4.2. Комплексное число λ, не являющееся регулярным называется *спектральной точкой* или спектральным значением оператора M. Множество спектральных точек $\sigma(M)$ называется *спектром* оператора M. Таким образом, $\sigma(M) = \mathbb{C} \setminus \rho(M)$.

Спектр всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leq C\cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|$. Точнее, *спектр $\sigma(M)$ лежит в круге, радиус которого равен $C \cdot r_M$*, где

$$r_M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{L}(\mathfrak{F})\|M^n\|}.$$

При $|\lambda| > C \cdot r_M$ всегда существует резольвента и $R_\lambda(M) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{M^k}{\lambda^{k+1}}$. Для резольвенты выполняется *тождество Гильберта*

$$R_\lambda(M) - R_\mu(M) = (\mu - \lambda)R_\lambda(M)R_\mu(M), \quad \lambda, \mu \in \rho(M), \qquad (1.4.2)$$

которое проверяется непосредственно.

Теорема 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Тогда резольвентное множество $\rho(M)$ открыто, а резольвента $R_\lambda(M)$ оператора M является аналитической функцией переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ в окрестности регулярной точки $\mu \in \rho(M)$, причем для $|\mu - \lambda| < 1/(C\cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|R_\mu(M)\|)$ справедливо*

$$R_\lambda(M) = R_\mu(M) + \sum_{k=1}^{\infty}(\mu - \lambda)^k R_\mu^{k+1}(M). \qquad (1.4.3)$$

Доказательство. Пусть $\mu\in\rho(M)$, тогда оператор $R_\mu(M)\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Рассмотрим

$$\lambda\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M = (\mu\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M) - (\mu - \lambda)\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} \ \Rightarrow$$

$$R_\mu(M)(\lambda \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M) = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - (\mu - \lambda) R_\mu(M).$$

В силу предыдущей теоремы, существует обратный оператор к оператору $\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - (\mu - \lambda) R_\mu(M)$ при $C|\mu - \lambda| \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|R_\mu(M)\| < 1$, а следовательно, $\lambda \in \rho(M)$.

Далее, в силу (1.4.2), при $|\mu - \lambda| < 1/(C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|R_\mu(M)\|)$ справедливо равенство

$$R_\lambda(M) = R_\mu(M) + (\mu - \lambda) R_\lambda(M) R_\mu(M).$$

Последовательно подставляя в правую часть $R_\lambda(M)$, формально получим ряд (1.4.3). Сходимость данного ряда показывается аналогично доказательству теоремы 1.4.1, с использованием оценки:
$|\mu - \lambda| < 1/(C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|R_\mu(M)\|)$. •

Аналитические функции операторов

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$. Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Будем говорить, что $f(z)$ *аналитична в* D, если для любого $z_0 \in D$ существует окрестность V_{z_0}, в которой функция $f(z)$ может быть представлена как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n, \qquad f_n \in \mathfrak{F}.$$

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$, элементы $c_n \in \mathfrak{F}$, будем называть *рядом Лорана.* Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, то *вычетом* функции в этой

точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификацию изолированных особых точек будем понимать также, как в теории функций комплексного переменного.

Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ, умноженную на коэффициент $2\pi i$. Тогда ясно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Пусть $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, обозначим через K_M класс всех функций $\varphi(\lambda)$ комплексного переменного, *кусочно-аналитических на спектре* $\sigma(M)$. Это означает, что функция $\varphi \in K_M$, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения функции $\varphi(\lambda)$ состоит из конечного числа открытых связных компонент, объединение которых содержит спектр $\sigma(M)$ оператора M, причем каждая компонента содержит по крайней мере одну точку спектра;

2) функция $\varphi(\lambda)$ кусочно–голоморфна, то есть голоморфна в каждой компоненте своей области определения.

Если две функции $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda) \in K_M$ совпадают на некоторой открытой окрестности спектра $\sigma(M)$, то, очевидно, они будут аналитическим продолжением друг друга. Такие функции считаются равными.

Для $\varphi \in K_M$ всегда найдется гладкий, сложный, вообще говоря, контур Γ_M, охватывающий спектр $\sigma(M)$. Другими словами, Γ_M распадается на конечное число границ некоторых открытых множеств, объединение которых принадлежит области определения φ и

накрывает спектр $\sigma(M)$, каждый из жордановых контуров «положительно» ориентирован, т. е. так, чтобы при движении в заданном направлении по контуру соответствующее множество оставалось слева. После этого положим для $\varphi \in K_M$

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda.$$

Из теоремы Коши следует независимость интеграла от выбора контура. В частности, операторная экспонента e^{Mt} и сам оператор M задаются следующим образом:

$$e^{Mt} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} e^{\lambda t} R_\lambda(M) d\lambda, \qquad M = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \lambda R_\lambda(M) d\lambda.$$

Рассмотрим оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, спектр которого образует несвязное множество. Замкнутую часть спектра, имеющую в нем замкнутое дополнение, называют *спектральным множеством.*

Предположим, что

$$\sigma(M) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(M),$$

где $\sigma_k(M)$ $(k = \overline{1, m})$ — непересекающиеся спектральные множества. Будем считать, что контур Γ_M состоит из непересекающихся частей Γ_k $(k = \overline{1, m})$, каждая из которых окружает область G_k, содержащую соответствующее спектральное множество $\sigma_k(M)$.

Зададим функции $\varphi_k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in G_k, \\ 0, & \text{если } \lambda \in G_j, \quad j \neq k. \end{cases}$

Функции $\varphi_k \in K_M$ $(k = \overline{1, m})$, и поэтому имеют смысл операторы

$$P_k = \varphi_k(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi_k(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} R_\lambda(M) d\lambda.$$

Последний интеграл в этом равенстве известен под названием *интеграл Ф. Рисса.*

Поскольку в области $G = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k$ выполняются соотношения

$$\varphi_k(\lambda)\varphi_j(\lambda) = \delta_{kj}\varphi_k(\lambda),$$

(δ_{kj} – символ Кронекера); $\sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda) \equiv 1$, справедливы равенства

$$P_k P_j = 0 \ (k \neq j); \ P_k^2 = P_k; \ \sum_{k=1}^{m} P_k = I.$$

2. Вырожденные голоморфные группы операторов

2.1. Относительно резольвенты

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Замечание 2.1.1. Если пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, а оператор $L = \mathbb{I}$, то $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ совпадают с классическим определением резольвентного множества и спектра оператора M соответственно.

Замечание 2.1.2. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то L-резольвентное множество и L-спектр оператора M совпадают с резольвентным множеством и спектром оператора $L^{-1}M$ (или оператора ML^{-1}).

Замечание 2.1.3. Пусть пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. Если оператор L непрерывно обратим, а оператор $M = \mathbb{I}$, то $\rho^L(M) = \rho(L^{-1})$ и $\sigma^L(M) = \sigma(L^{-1})$. Также, когда операторы L и M инволютивные, то $\rho^M(L) = \rho^L(M)$ и $\sigma^M(L) = \sigma^L(M)$, где определение множества $\rho^M(L)$ такое же определение множества $\rho^L(M)$ с заменой места операторов L и M.

Напомним, что оператор T называется инволютивным, если $T = T^{-1}$ такой, что $T^2 = \mathbb{I}$.

Лемма 2.1.1. *Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, и, следовательно, $\sigma^L(M)$ всегда замкнут.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из равенства

$$\lambda L - M = (\mu L - M) + (\lambda - \mu)L \tag{2.1.1}$$

вытекает, что и круг

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - \mu| < \big(C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \|(\mu L - M)^{-1} L\|\big)^{-1}\} \tag{2.1.2}$$

с центром в точке μ тоже содержится в $\rho^L(M)$.

Таким образом, множество $\rho^L(M)$ открыто. Доказательство, что $\sigma^L(M)$ замкнут очевидно. •

Определение 2.1.1. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентой* оператора M.

Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из тривиальных тождеств:

$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = \mathbb{I} + (\lambda - \mu) L (\mu L - M)^{-1},$$

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1} L \tag{2.1.3}$$

справедливы L-резольвентные тождества, являющиеся аналогами тождества Гильберта:

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L (\lambda L - M)^{-1}, \tag{2.1.4}$$

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) R^L_\mu(M) R^L_\lambda(M), \tag{2.1.5}$$

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) L^L_\mu(M) L^L_\lambda(M). \tag{2.1.6}$$

Отметим еще два полезных тождества:

$$L R^L_\mu(M) = L^L_\mu(M) L, \tag{2.1.7}$$

$$MR^L_\mu(M) = L^L_\mu(M)M. \tag{2.1.8}$$

Замечание 2.1.4. В случае, если существует L^{-1}, тогда в силу тождества (2.1.7) операторы $R^L_\alpha(M)$ и $L^L_\alpha(M)$ сопряжены, то есть $R^L_\alpha(M) = L^{-1}L^L_\alpha(M)(L^{-1})^{-1}$ или $L^L_\alpha(M) = LR^L_\alpha(M)L^{-1}$. Аналогично, в силу тождества (2.1.8), если существует M^{-1}.

Напомним, что операторы L и $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ являются сопряженными, если существует оператор T такой, что $L = TMT^{-1}$

Замечание 2.1.5. В случае, когда оператор L непрерывно обратим, то правая (левая) L-резольвента оператора M совпадает с резольвентой оператора $L^{-1}M$ (ML^{-1}).

Лемма 2.1.2. *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M непрерывны в $\rho^L(M)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, а точка λ в силу леммы 2.1.1 лежит в круге (2.1.2). Тогда из равенства (2.1.1) следует возможность представления L-резольвенты оператора M рядом Неймана

$$(\lambda L - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}((\mu-\lambda)^k(R^L_\mu(M))^k(\mu L - M)^{-1} =$$

$$= (\mu L - M)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}((\mu-\lambda)^k(L^L_\mu(M))^k \to (\mu L - M)^{-1}$$

при $\lambda \to \mu$. Отсюда следует, что лемма доказана. •

Теорема 2.1.1. *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, а точка λ лежит в круге (2.1.2), то в силу равенства (2.1.4)

$$-\lim_{\lambda\to\mu} \frac{(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1}}{\lambda - \mu} =$$

$$= \lim_{\lambda\to\mu} (\mu L - M)^{-1} L (\lambda L - M)^{-1} =$$

$$= -(\mu L - M)^{-1} L (\mu L - M)^{-1}.$$

Отсюда в силу леммы 2.1.2 и непрерывности оператора L следует, что лемма доказана. •

Замечание 2.1.6. В силу равенств (2.1.5)((2.1.6)), доказательство того, что правая (левая) L-резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$ очевидно.

2.2. Относительно p-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Определение 2.2.1. Оператор M называется *спектрально ограниченным* относительно оператора L (коротко, (L, σ)-*ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \ \Rightarrow \ \big(\mu \in \rho^L(M)\big) .$$

Замечание 2.2.1. В силу замечания 2.1.1, оператор M (L, σ)-ограничен, если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$.

Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, а контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| =$

$r > a\}$. Рассмотрим интегралы типа Ф. Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)d\mu, \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_{\mu}(M)d\mu. \tag{2.2.1}$$

Лемма 2.2.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы.*

Доказательство. Возьмем контур $\acute{\gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = \acute{r} > r\}$.

В силу аналитичности подинтегральной оператор-функции

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\acute{\gamma}} R^L_{\lambda}(M)d\lambda, \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\acute{\gamma}} L^L_{\lambda}(M)d\lambda.$$

Отсюда,

$$P^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\acute{\gamma}}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)R^L_{\mu}(M)d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_{\acute{\gamma}} \frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)d\mu + \int\limits_{\acute{\gamma}} R^L_{\lambda}(M)d\lambda\int\limits_{\gamma}\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M)d\mu = P,$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и тождества (2.1.5). Утверждение относительно оператора Q доказывается аналогично с заменой правого L-резольвентного тождества (2.1.5) на левое (2.1.6).

•

Положим $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^1) = \ker P$ $(\mathrm{im}P)$, $\mathfrak{F}^0$ $(\mathfrak{F}^1) = \ker Q$ $(\mathrm{im}Q)$, и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Из предыдущей леммы следует, что проекторы P и Q расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Замечание 2.2.2. В силу равенств (2.1.7) и (2.1.8), $\forall\ u \in \mathfrak{U}$ имеем следующие соотношения:

$$LPu = QLu, \tag{2.2.2}$$

$$MPu = QMu. \tag{2.2.3}$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\}$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$.

Теорема 2.2.1. (Теорема о расщеплении). *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда*

(i) *операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;*

(ii) *существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.*

Доказательство. (i) Утверждение относительно операторов L_k, M_k, $k = 0, 1$ справедливо вытекает из проверяемых соотношений (2.2.2), (2.2.3) соответственно.

(ii) С помощью равенств в (2.1.3) при $\lambda = 0$, по непрерывности оператора M и по лемме 2.2.1 полагая $f^0 \in \mathfrak{F}^0$, то

$$M\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu L - M)^{-1}f^0\frac{d\mu}{\mu} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{d\mu}{\mu}f^0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L_\mu^L(M)f^0 d\mu = -f^0.$$

Теперь пусть $u^0 \in \mathfrak{U}^0$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu L - M)^{-1}\frac{d\mu}{\mu}Mu^0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{d\mu}{\mu}u^0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R_\mu^L(M)u^0 d\mu = -u^0.$$

Значит, что оператор M_0^{-1} равен сужению оператора

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu L-M)^{-1}\frac{d\mu}{\mu}$$

на подпространство $\mathfrak{F}^0$. Также, в силу леммы 2.2.1, оператор L_1^{-1} равен сужению оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu L-M)^{-1}d\mu.$$

на подпространство $\mathfrak{F}^1$. •

В силу теоремы о расщеплении, существуют операторы: $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Также, получим точно такие расщепления действий операторов L и M, где имеем следующие соотношения:

$$L=L_0(\mathbb{I}-P)+L_1P \qquad \text{и} \qquad M=M_0(\mathbb{I}-P)+M_1P. \tag{2.2.4}$$

Следствие 2.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.1*, тогда при всех* $\mu\in\mathbb{C}$*:* $|\mu|>a$ *имеет место:*

$$(\mu L-M)^{-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kH^kM_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q. \tag{2.2.5}$$

Доказательство. Оператор-функция $(\mu L_0-M_0)^{-1}$ является целой функцией в силу теоремы 2.2.1. Поэтому мы эту функцию можем представить рядом Тейлора:

$$(\mu L_0-M_0)^{-1}=(\mu H-\mathbb{I})^{-1}M_0^{-1}=\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kH^k\right)M_0^{-1},$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте в $\mathbb{C}$.

Для $(\mu L_1-M_1)^{-1}$ имеем

$$(\mu L_1-M_1)^{-1}=(\mu\mathbb{I}-S)^{-1}L_1^{-1}=$$

$$= \mu^{-1}\left(\mathbb{I} - \mu^{-1}S\right)^{-1} L_1^{-1} = \mu^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^k\right) L_1^{-1}.$$

Отсюда, для (L,σ)-ограниченного оператора M, в силу теоремы 2.1.1 и последних двух разложений, имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q. \bullet$$

Здесь $H^0 = \mathbb{I}$, если $H \not\equiv \mathbb{O}$, и $S^0 = \mathbb{I}$, если $S \not\equiv \mathbb{O}$, где тождественные операторы определены на пространствах $\mathfrak{U}^0$ и $\mathfrak{U}^1$ соответственно.

Замечание 2.2.3. Из определении операторов H и L_0, оператор $L_0 \equiv \mathbb{O}$ точно тогда, когда оператор $H \equiv \mathbb{O}$. Операторы $S = H \equiv \mathbb{O}$, если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \{0\}$. Также, когда оператор L обратим, тогда операторы S и M равны.

Определение 2.2.2. Бесконечно удаленная точка L-резольвенты оператора M называется

- *устранимой особой точкой*, если $H \equiv \mathbb{O}$;
- *полюсом порядка* p, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$ $p \in \mathbb{N}$;
- *существенно особой точкой*, если $H^k \neq \mathbb{O}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем условимся устранимую особую точку называть полюсом порядка нуль.

Следствие 2.2.2. *Пусть оператор L непрерывно обратим, тогда L-спектр оператора M совпадает со спектром оператора S и ∞ является устранимой особой точкой резольвенты оператора S.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.2.1, оператор M (L,σ)-ограничен. В условиях теоремы 2.2.1 и замечания 2.1.2, получим

$\sigma^L(M) = \sigma(S)$. Кроме того, ∞ окажется устранимой особой точкой резольвенты $(\mathbb{I} - L^{-1}M)^{-1}$. Поэтому, ∞ будет устранимой особой точкой резольвенты оператора S. •

Следствие 2.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.1*, причем* ∞ *— устранимая особая точка* L*-резольвенты оператора* M*. Тогда,*

(i) $\ker L = \mathfrak{U}^0$ *и* $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} L$*;*

(ii) *существует оператор* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$*, если ядро* $\ker L = \{0\}$.

Доказательство. (i) Включение $\ker L \subset \ker P$ очевидно. Покажем обратное включение. Из замечания 2.2.3 следует $L_0 \equiv \mathbb{O}$. Это значит, что $\forall\ u \in \mathfrak{U}^0\ Lu = 0$, что и требовалось. Далее,

$$Lu = L(\mathbb{I} - P + P)u = L_0(\mathbb{I} - P)u + L_1 Pu =$$

$$= 0 + (\mathbb{I} - Q)L_1 Pu + QL_1 u = L_1 Pu + L_1 P^2 u + QL_1 Pu = 0 + QL_1 Pu,$$

поэтому, $\operatorname{im} L \subset \operatorname{im} Q$.

Обратно, поскольку $Qu = L\int\limits_{\gamma}(\mu L - M)^{-1} d\mu$, то $\operatorname{im} Q \subset \operatorname{im} L$, так как оператор L непрерывен, а последний интеграл существует.

(ii) Согласно пункту (i) имеем, $\ker L = \mathfrak{U}^0$, а так как $\ker L = \{0\}$, то $\mathfrak{U}^0 = \{0\}$. По теореме 2.2.1, существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, следовательно, $\mathfrak{F}^0 = \{0\}$. Так как $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} L = \mathfrak{F}$ в силу пункта (i), оператор L – биективен и по теореме 1.2.2 существует оператор L^{-1}.•

Определение 2.2.3. Оператор M называется (L, p)*-ограниченным*, если (L, σ)-ограничен и ∞ является полюсом порядка p, где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

Мы будем считать термины «оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$» и «оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ – несуществен-

ная особая точка L-резольвенты оператора M» эквивалентными.

Замечание 2.2.4. В силу пункта (ii) следствия 2.2.3 и замечания 2.2.1, оператор $M(L,0)$-ограничен, если $\ker L = \{0\}$.

2.3. Относительно присоединенные векторы

Напомним, что $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 2.3.1. Вектор $\varphi \in \mathfrak{U}$ назовем *M-присоединенным вектором* оператора L, если существует вектор $\psi \in \mathfrak{U}$ такой, что $L\psi = M\varphi$.

Определение 2.3.2. Пусть $\ker L \neq 0$, $\varphi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$ собственный вектор оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_k : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k,\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N};$$

$$\varphi_k \notin \ker L \backslash \{0\}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.3.1}$$

Цепочка операторов может быть бесконечной, однако она обязательно конечна, если существует вектор $\varphi_q \in \{\varphi_k : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ такой, что $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее длиной.

Определение 2.3.3. Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется *M-корневым линеалом* оператора L. Если линеал замкнут, то он называется *M-корневым пространством* оператора L.

Лемма 2.3.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathfrak{U}^0$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{k+1}\}$ – цепочка M-присоединенных векторов оператора L. В силу метода математической индукции, используя очевидное рекурентное соотношение

$$L\varphi_{k+1} + \mu L\varphi_k = \mu(\mu L - M)\varphi_k,$$

докажем, что для любого $\mu \in \rho^L(M)$

$$-R^L_\mu(M)\varphi_k = \varphi_{k-1} + \mu\varphi_{k-2} + ... + \mu^{k-1}\varphi_0,$$

тогда

$$P\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\varphi_k d\mu =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)(\varphi_{k-1} + \mu\varphi_{k-2} + ... + \mu^{k-1}\varphi_0)d\mu = 0, \qquad (2.3.2)$$

в силу теоремы Коши. Следовательно, лемма доказана. •

Определение 2.3.4. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *фрегольмовым*, если $\dim\ker\ L = \text{codimim}\ L < \infty$.

Замечание 2.3.1. В случае, когда оператор L фредгольмов, то можно выберать в $\ker\ L$ какой-нибудь базис $\{\varphi^1_0, \varphi^2_0, ..., \varphi^n_0\}$, где $n = \dim\ker\ L$ и предположить, что каждому вектору $\{\varphi^m_0\}$ поставлена в соответствие конечная цепочка M-присоединенных векторов $\{\varphi^m_1, \varphi^m_2, ..., \varphi^m_{p_m}\}$, где $1 \le m \le n$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Введем в расмотрение условие (A)

$$\psi = \sum_{m=1}^{n} a_m M\varphi^m_{p_m} \notin \text{im}\ L, \text{если}\ \sum_{m=1}^{n} |a_m| > 0, \qquad (A)$$

где $\varphi^m_{p_m} = \{\varphi^m_0\}$, если вектор $\{\varphi^m_0\}$ не имеет M-присоединенных векторов.

Лемма 2.3.2. *Пусть выполнено условие* (A). *Тогда пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{F}$ *расщепляются в прямые суммы* $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, *причем существуют оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть оператор* L *фредгольмов и длина любой цепочки* M*-присоединенных векторов оператора* L *не превышает* p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Тогда условие* (A) *выполнено.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi^1_0, \varphi^2_0, ..., \varphi^n_0\}$ – некоторый базис в $\ker L$, $\dim \ker\ L = n$. Из предположения вытекает, что каждому вектору $\{\varphi^m_0\}$ можно поставить в соответствие цепочку $\{\varphi^m_1, \varphi^m_2, ..., \varphi^m_{p_m}\}$, где $1 \leq m \leq n$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N} M$-присоединенных векторов. Пусть условие (A) нарушено. В базис $\ker\ L$ выберем векторы φ^k_0 с номерами k такими, что

$$p_k = \max\{p_m : a_m \neq 0, \sum_{m=1}^{n} a_m M \varphi^m_{p_m} \in \operatorname{im}\ L\} \tag{2.3.3}$$

Один из таких векторов (скажем, $\varphi^{k_1}_0$) Заменим в базисе вектором

$$\varphi^{k_1}_0 = \sum_{k=1}^{l} a_k M \varphi^k_0,$$

где k – количество чисел p_k , удовлетворяющих (2.3.3), а коэффициенты a_k соответствуют векторам $\varphi^n_{p_k}$ в линейной комбинации

$$\sum_{m=1}^{n} a_m M \varphi^m_{p_m}.$$

Очевидно, вектор $\varphi^{k_1}_0$ имеет цепочку M-присоединенных векторов, длина больше p_n, но не превосходит p, согласно предположения. Для нового базиса проверим выполнение условия (A). Если оно

опять не выполняется, то описанную выше процедуру стоит повторить. В результате за конечное число шагов мы придем к выполнению условия (A). •

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.1 *справедливо все условий теоремы о расщеплении.*

Доказательство этой следствия очевидно, согласно лемме 2.3.3 и теореме 2.3.1. Обозначим через L_0 сужение оператора L на $\mathfrak{U}^0$. По построению оператора $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$. Положим $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$.

Напомним, что оператор T называется нильпотентным, если $T^k = \mathbb{O}$, для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$. Оператор T называется квазинильпотентным, если его спектр $\sigma(T) = \{0\}$.

Следствие 2.3.2. *В условиях теоремы* 2.3.1*, оператор H нильпотентен степени не больше p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем $\sigma(H) = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$. Из теоремы 2.3.1, определения M-присоединенных векторов и конструкции оператора H, получим

$$H\varphi_1 = \varphi_0, H^2\varphi_2 = \varphi_0, ..., H^p\varphi_0 = \varphi_0 \neq 0,$$

но $H^{p+1}\varphi_{p+1} = 0$. Это значит, что $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$, если $p \in \mathbb{N}$, и если $p = 0$, то $H \equiv \mathbb{O}$. Следовательно, оператор H нильпотентен степени не больше p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Далее, так как каждый нильпотентный оператор является квазинильпотентным, тогда $\sigma(H) = \{0\}$, и следствие доказано.•

Замечание 2.3.2. Если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \{0\}$, то оператор S является ква-

зинильпотентным в силу следствия 2.3.1 и замечания 2.2.3.

Теорема 2.3.2. *Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

(ii) длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превышает p, и существует по крайней мере одна цепочка длины p.

Доказательство. Во-первых, докажем, что $(i) \Rightarrow (ii)$. Из (2.3.2) вытекает, что M- корневой линеал оператора L всегда содержится в $\mathfrak{U}^0$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{U}^0$. Положим, что

$$\varphi_p = \varphi, \varphi_{p-1} = H\varphi, ..., \varphi_0 = H^p\varphi.$$

Поскольку $H = M_0^{-1}L_0$, то множество $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_p\}$ будет цепочкой M присоединенных векторов собственного вектора $\varphi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$. Пусть $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{p+1}\}$ цепочка M присоединенных векторов собственного вектора $\varphi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$.

В силу тождеств (2.3.1) и (2.3.2), получим $\varphi_{p+1} \in \mathfrak{U}^0$ и $\varphi_{p+1} = H^{p+1}\varphi_0$. Так как, ∞–полюс порядка p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$, следовательно, $\varphi_{p+1} = 0$. Поэтому, $\mathfrak{U}^0 = \{0\}$. Это означает, длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превышает p.

Во-вторых, докажем, что $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$, где $a \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu L_0 - M_0)^{-1}(\mathbb{I} - Q) + (\mu L_1 - M_1)^{-1}Q =$$

$$= (\mu H - \mathbb{I})^{-1}M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + (\mu\mathbb{I} - S)^{-1}L_1^{-1}Q.$$

Разложим резольвенты $(\mu H - \mathbb{I})^{-1}$ и $(\mathbb{I} - \mu^{-1}S)^{-1}$ в ряд, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{p} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

В силу нильпотентности оператора H, первое слагаемое является целой функцией. Так как, $\sigma^L(M) = \sigma(S)$ из следствия 2.2.2, а спектр $\sigma(S)$ ограниченного оператора ограничен, то число $\mu \in \mathbb{C}$ достаточно взять таким, что $|\mu| > {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)}\|S\|$ для существования второго слагаемого.

Первое и второе слагаемые показывают, что ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M. Таким образом, оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. •

Замечание 2.3.3. В случае, когда оператор L фредгольмов, теорема 1.4.2 устанавливает необходимость и достаточность условия (ii) для (L, σ)-ограниченности оператора M, причем ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M.

Следствие 2.3.3. *Пусть длина любой цепочки M-присоединенных векторов фредгольмова оператора L ограничена числом p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда все равенства в лемме* 2.3.1 *выполнены.*

Доказательство этого следствия очевидно в силу теоремы 2.3.2 и леммы 2.3.1.

2.4. Разрешающие группы операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Нас будут интересовать разрешающие группы линейного однородного операторно-дифференциального уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2.4.1}$$

Уравнение (2.4.1) будем называть уравнением соболевского типа.

Определение 2.4.1. *Решением уравнения* (2.4.1) называется вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, если она удовлетворяет этому уравнению.

Решение $u = u(t)$ уравнения (2.4.1) назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0, \tag{2.4.2}$$

для уравнения (2.4.1) (коротко, задачи (2.4.1), (2.4.2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2.4.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнения (2.4.1) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\beta(M)\dot{u} = (\beta L - M)^{-1}Mu, \tag{2.4.3}$$

$$L^L_\beta(M)\dot{f} = M(\beta L - M)^{-1}f, \tag{2.4.4}$$

где $\beta \in \rho^L(M)$. Уравнения (2.4.3) и (2.4.4) будем рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.4.5}$$

где вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{J})$ и операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{J})$, а $\mathfrak{J}$ — квазибанахово пространство.

Определение 2.4.2. Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{J}))$ называется *группой разрешающих операторов* уравнения (2.4.1), если

(i) $U^s U^t = U^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ есть решение уравнения (2.4.1).

Замечание 2.4.1. Обычно, группу операторов отождествляют с ее образом $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Определение 2.4.3. Группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется *голоморфной группой разрешающих операторов*, если она аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с сохранением условий (i) и (ii) из определения 2.4.2; и *вырожденной*, если ее единица $U^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{J})$ является проектором.

Теорема 2.4.1. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует голоморфная разрешающая группа уравнения* (2.4.1)*, которая к тому же имеет вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.6}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$.

Доказательство. Возьмем контур $\acute{\gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = \acute{r} > r\}$. Поэтому в силу теоремы 2.1.1 и теоремы Коши

$$U^s = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\acute{\gamma}} R^L_\lambda(M) e^{\lambda s} d\lambda, s \in \mathbb{R}.$$

Отсюда,

$$U^s U^t = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\acute{\gamma}} \int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M) R^L_\mu(M) e^{\lambda s + \mu t} d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_{\acute{\gamma}} \frac{e^{\lambda s}d\lambda}{\lambda-\mu}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu + \int\limits_{\acute{\gamma}} R^L_\lambda(M)e^{\lambda s}d\lambda \int\limits_{\gamma}\frac{e^{\mu t}d\mu}{\mu-\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)e^{\mu(t+s)}d\mu = U^{s+t},$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и тождества (2.1.5).

Далее, покажем, что группа разрешает уравнение (2.4.3). Пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$, тогда

$$R^L_\beta(M)\frac{d}{dt}U^t u_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\beta L - M)^{-1}\mu L R^L_\mu(M)u_0 e^{\mu t}d\mu =$$

$$= (\beta L - M)^{-1}MU^t u_0,$$

в силу теоремы Коши.

Поскольку,

$$U^0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu = P,$$

тогда решение уравнения (2.4.3)

$$u(t) = U^t u_0 = U^{0+t}u_0 = U^0U^t u_0 = PU^t u_0 \in \mathfrak{U}^1 = \mathrm{dom}\ M_1 \subset \mathrm{dom}\ M,$$

в силу теоремы 2.2.1. Поэтому функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (2.4.1), и группа (2.4.6) является разрешающей и для уравнения (2.4.1). Очевидно, $U^\bullet \in C(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{J}))$ продолжается во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Следовательно, теорема доказана. •

Замечание 2.4.2. Аналогично доказывается утверждение теоремы, что отображение

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R} \tag{2.4.7}$$

будет группой разрешающих операторов уравнения (2.4.4) и (2.4.1).

Определение 2.4.4. Множество

$$\ker U^{\bullet} = \{u \in \mathfrak{U} : \exists\, t \in \mathbb{R}\ U^t u = 0\}$$

называется *ядром*, а множество

$$\operatorname{im} U^{\bullet} = \{u \in \mathfrak{U} : \exists\, t \in \mathbb{R}\ U^0 u = u\}$$

образом аналитической группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Замечание 2.4.3. В силу определения аналитической группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ можно показать, что $\ker U^{\bullet} = \ker U^t$ и $\operatorname{im} U^{\bullet} = \operatorname{im} U^t\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.4.4. В условиях теоремы 2.4.1 и замечания 2.4.2, единица группа $U^0(F^0)$ совпадает с проектором $P(Q)$. Следовательно, $PU^t = U^tP = U^t$, $QF^t = F^tQ = F^t$.

В силу выше изложенного замечания и определения проектора P и Q, справедливо следующее

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы* 2.4.1 *и замечания* 2.4.2, $\ker U^{\bullet} = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} U^{\bullet} = \mathfrak{U}^1$; $\ker F^{\bullet} = \mathfrak{F}^0$, $\operatorname{im} F^{\bullet} = \mathfrak{F}^1$.

Определение 2.4.5. Множество $\mathfrak{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.4.1), если

(i) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.4.1),(2.4.2);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2.4.1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Замечание 2.4.5. Очевидно, что существование фазового пространство следует его единственность в силу определения 2.4.5.

Теорема 2.4.2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения* (2.4.1) ((2.4.4)) *служит подпространство* $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$.

Доказательство. Пусть $u = u(t)$ – решение уравнения (2.4.1). Положим $u = (\mathbb{I} - P) + Pu = u^0 + u^1$, тогда в силу теоремы 2.2.1 уравнения (2.4.1) эквивалентно системе из двух уравнений:

$$H\dot{u}^0 = u^0, \qquad \dot{u}^1 = Su^1, \tag{2.4.8}$$

где $u^0 = u^0(t) \in \mathfrak{U}^0$ и $u^1 = u^1(t) \in \mathfrak{U}^1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Дифференцируя первое уравнение по t и применяя оператор H слева последовательно, получим

$$0 = H^{p+1}\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}u^0(t) = H^p\frac{d^p}{dt^p}u^0(t) = ... = Hu^0(t) = u^0(t).$$

Значит, все решения уравнения (2.4.1) лежит в $\mathfrak{U}^1$ как траектории. Далее, в силу теоремы 2.2.1 оператор $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$. Поэтому при любых $u_0^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение задачи Коши $u^1(t) = u_0^1$, имеющее вид

$$u^1(t) = e^{tS}u_0^1.$$

Таким образом, $\mathfrak{U}^1$ – фазовое пространство уравнения (2.4.1). Утверждение теоремы относительно и $\mathfrak{F}^1$ (образ разрешающей группы (2.4.7)) устанавливается аналогично. •

Следствие 2.4.2. *Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Если оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ непрерывно обратим, то фазовое пространство уравнения* (2.4.1) ((2.4.4)) *совпадает с пространством* $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Согласно теореме 2.4.2, фазовым пространством уравнения (2.4.1) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$). Поскольку оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$ существует, то оператор L биективен. Следовательно, следствие доказано. •

Замечание 2.4.6. Если $\ker L = \{0\}$, и $p = 0$, то доказательство следствия 2.4.2 очевидно в силу следствиz 2.2.3.

Замечание 2.4.7. Если операторы L и M инволютивные или такие, как в замечании 2.1.1, то результат аналогичен следствию 2.4.2.

Следствие 2.4.3. *Группа* $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ *будет единственной разрешающей группой уравнения* (2.4.1), *если*

(i) вектор функция $u(t) = U^t u_0$ *является решением уравнения* (2.4.1) *при любом* $u_0 \in \mathfrak{U}$*;*

(ii) образ $im\ U^\bullet$ *совпадает с фазовым пространством уравнения* (2.4.1).

Доказательство. В условиях теоремы 2.4.1, вектор функция $u(t) = U^t u_0$ является решение уравнения (2.4.1) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Также, в силу теоремы 2.4.2 и следствия 2.4.1, образ $im\ U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (2.4.1). Единственность решения группы вытекает из замечания 2.4.5. •

Замечание 2.4.8. Аналогично следствия 2.4.3, группа $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ будет единственная разрешающая группа уравнения (2.4.1) в силу теоремы 2.4.6 и замечания 2.4.5.

2.5. Порождающие операторы вырожденных голоморфных групп

Пусть квазибанаховые пространства последовательностей $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \tag{2.5.1}$$

Пусть существуют топлинейные изоморфизмы

$$A : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 \qquad \text{и} \qquad B : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1 \tag{2.5.2}$$

Пусть на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$ задана голоморфная группа операторов

$$e^{tS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} t^k \qquad \left(e^{tT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} t^k \right), \tag{2.5.3}$$

где $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$ $(T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1))$ — некоторый оператор.

Пусть существует такой оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, что оператор

$$A^{-1}C = H \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0) \tag{2.5.4}$$

нильпотентен степени $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Построим операторы,

$$L = C(\mathbb{I} - P) + BP \qquad \text{и} \qquad M = A(\mathbb{I} - P) + BSP, \tag{2.5.5}$$

где $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — проектор из первого расщепления (2.5.1) (т.е. $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{U}^1) = \ker P(\mathrm{im} P)$). По построению операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Теорема 2.5.1. *Оператор M (L, p)-ограничен точно тогда, когда все условия* (2.5.1)–(2.5.5) *выполнены.*

Доказательство. Пусть все условия (2.5.1)–(2.5.5) выполнены. В силу условия (2.5.5), оператор

$$\mu L - M = (\mu C - A)(\mathbb{I} - P) + B(\mu \mathbb{I} - S)P,$$

где $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — проектор из первого расщепления (2.5.1) и число $\mu \in \mathbb{C}$, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu C - A)^{-1}(\mathbb{I} - Q) + (\mu B - BS)^{-1}Q =$$

$$= (\mu H - \mathbb{I})^{-1}A^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \mu^{-1}(\mathbb{I} - \mu^{-1}S)^{-1}B^{-1}Q,$$

где $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проектор из второго расщепления (2.5.1). В силу нильпотентности оператора H и следствия 2.2.2, первое слагаемое и второе слагаемое существуют при число $\mu \in \mathbb{C}$ таким, что $|\mu| > {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)}\|S\|$ и показывают, что ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M.

Таким образом, оператор M (L,p)-ограничен, причем L резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M разлагается в ряд Лорана:

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k A^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} B^{-1} Q. \quad (2.5.6)$$

Обратно, пусть оператор M (L,p)-ограничен . Тогда в силу теоремы 2.2.1, теоремы 2.5.1 и замечание 2.4.2, все условия (2.5.1)–(2.5.5) выполнены. •

Замечание 2.5.1. В силу теорем 2.4.1 и 2.5.1, простроенные операторы L и M порождают на $\mathfrak{U}$ голоморфную вырожденную группу операторов $U^t = \mathbb{O}(\mathbb{I} - P) + e^{tS}P$, $t \in \mathbb{R}$. (Если вдобавок оператор $T = BSB^{-1}$, то эти же операторы порождают на $\mathfrak{F}$ голоморфную вырожденную группу $F^t = \mathbb{O}(\mathbb{I} - Q) + e^{tT}Q$).

Замечание 2.5.2. Согласно теоремы 2.5.1, условия (2.5.1)–(2.5.5) в терминах голоморфных вырожденных групп, необходимых и достаточных для (L,p)-ограниченности оператора M.

3. Линейные динамические уравнениия соболевского типа

3.1. Задача Коши для неоднородного уравнения

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, а операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть $[a,b] \subset \mathbb{R}$– некоторый интервал, содержащий точку нуль. Возьмем вектор-функцию $f \in C^\infty([a,b];\mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{3.1.1}$$

Определение 3.1.1. Вектор-функцию $u \in C^1([a,b];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (3.1.1), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (3.1.1) назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0, \tag{3.1.2}$$

для уравнения (3.1.1) (коротко, решением задачи (3.1.1), (3.1.2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (3.1.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема 3.1.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, точка $0 \in [a,b]$. Тогда при любых $f \in C^\infty([a,b];\mathfrak{F})$ и любых*

$$u_0 \in \left\{ u \in \mathfrak{U} : u = -\sum_{k=0}^{\infty} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(0) \right\},$$

существует единственное решение $u \in C^\infty([a,b];\mathfrak{U})$ задачи (3.1.1), (3.1.2)*, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds,$$

где семейство операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ *— разрешающая группа однородного уравнения* (2.4.1).

Замечание 3.1.1. Интегрирование в виде решения понимается как почленное интегрирование ряда Лорана для подинтегрального выражения. Как известно внутри области сходимости ряда такое действие правомерно.

Доказательство. Согласно теореме 1.3.1, задача (3.1.1), (3.1.2) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} H\dot{u}^0 &= u^0 + M_0^{-1} f^0, \quad u^0(0) = u_0^0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + L_1^{-1} f^1, \qquad u^1(0) = u_0^1. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Здесь операторы $H = M_0^{-1} L_0$, $S = L_1^{-1} M_1$; векторы $u^m \in \mathfrak{U}^m$, $f^m \in \mathfrak{F}^m$, $m = 0, 1$. Оператор $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, поэтому вторая задача (3.1.3) имеет единственное решение $u^1 \in C^\infty([a,b]; \mathfrak{U})$, представимое в виде

$$u^1(t) = e^{tS} u_0^1 + \int\limits_0^t e^{(t-s)S} L_1^{-1} Q f^1(s) ds,$$

где $t \in [a,b]$.

Для рассмотрения первой задачи (3.1.3) предположим дополнительно, что ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M. Тогда, последовательно дифференцируя первое уравнение (3.1.3) по t и умножая слева оператор H, в конце концов получим

$$u^0(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} f^{(k)}(t), \quad t \in [a,b].$$

Отсюда ясно, что первая задача (3.1.3) неразрешима, если

$$u_0^0 \neq -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} f^{(k)}(0). \tag{3.1.4}$$

С другой стороны, если (3.1.4) не выполняется, то первая задача (3.1.3) имеет единственное решение $u^0 \in C^\infty([a,b];\mathfrak{U}^0)$. Опишем множество допустимых начальных значений задачи (3.1.3), т.е. таких, при которых задачи (3.1.3) однозначно разрешима. Согласно (3.1.4) и в силу теоремы 1.3.1, это множество имеет вид

$$\mathfrak{P}_f = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + \sum_{k=0}^{p} L_0 M_0^{-1} f^{(k)}(0)) = 0\}.$$

Таким образом,

$$u_0 \in \left\{ u \in \mathfrak{U} : \ u = -\sum_{k=0}^{\infty} H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(0) \right\},$$

и теорема доказана. •

3.2. Задача Шоуолтера—Сидорова для неоднородного уравнения

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ рассмотрим неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{3.2.1}$$

которое можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\beta^L(M)\dot{u} = (\beta L - M)^{-1} Mu + (\beta L - M)^{-1} g, \tag{3.2.2}$$

$$L_\beta^L(M)\dot{f} = M(\beta L - M)^{-1} f + g. \tag{3.2.3}$$

Далее пусть $0 \in [a,b]$. Для уравнений (3.2.2) и (3.2.3), поставим соответственно обобщенные задачи Шоуолтера–Сидорова [46]

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(u(0) - u_0) = 0, \tag{3.2.4}$$

$$[L_\alpha^L(M)]^{p+1}(f(0)-f_0)=0, \tag{3.2.5}$$

Обе эти задачи будем рассматривать как конкретные интерпретации задачи

$$A^{p+1}(v(0)-v_0)=0, \tag{3.2.6}$$

для уравнения (2.4.5).

Вектор-функцию $u \in C^1([a,b];\mathfrak{U})$ назовем решением уравнения (3.2.1). Решение $u=u(t)$ уравнения (3.2.1) назовем решением задачи (3.2.1), (3.2.4), если оно удовлетворяет (3.2.4) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема 3.2.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, точка $0 \in [a,b]$. Тогда при любых $g \in C^{p+1}([a,b];\mathfrak{F})$ и любых $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u=u(t)$, $t \in [a,b]$, задачи* (3.2.1), (3.2.4), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t)=-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)g^{(k)}(t)+U^t u_0+\int\limits_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Qg(s)ds.$$

Здесь семейство операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$–разрешающая группа однородного уравнения (2.4.1).

Доказательство. Согласно теореме 1.3.1, задача (3.2.1), (3.2.4) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} H\dot{u}^0 &= u^0+M_0^{-1}L_0 g_0, \qquad & u^0(0)&=u_0^0,\\ \dot{u}^1 &= Su^1+L_1^{-1}g_1, \qquad & u^1(0)&=u_0^1, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

где операторы $H=M_0^{-1}L_0$, $S=L_1^{-1}M_1$; векторы $u_k \in \mathfrak{U}^k$, $g_k \in \mathfrak{F}^k$, $k=0,1$. Оператор $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, поэтому вторая задача (3.2.7) имеет

единственное решение $u^1 \in C^1([a,b];\mathfrak{U}^1)$, представимое в виде

$$u^1(t) = e^{tS}u_0^1 + \int\limits_0^t e^{(t-s)S}L_1^{-1}Qg^1(s)ds,$$

где $t \in [a,b]$.

По лемме 1.4.1, оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен, поэтому первая задача (3.2.7) решается точно так же, как первая задача (3.1.3). Именно, условие

$$u_0^0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{(k)}(0), \tag{3.2.8}$$

является необходимым и достаточным для существования единственного решения $u^0 \in C^{p+1}([a,b];\mathfrak{U}^0)$ данной задачи, представимого в виде

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{(k)}(t), \qquad t \in [a,b].$$

Опишем множество допустимых начальных значений задачи (3.2.7), т.е. таких, при которых задачи (3.2.7) однозначно разрешима. Согласно (3.2.8) и в силу теоремы 1.3.1, это множество имеет вид

$$\mathfrak{P}_g = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + \sum_{k=0}^{p} L_0 M_0^{-1} g^{(k)}(0)) = 0\}.$$

Поскольку $(\mathbb{I} - Q)MPu = 0 \ \forall u \in \mathfrak{U}$, то любой вектор $u \in \mathfrak{P}_g$ имеет вид

$$u = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} g^{(k)}(0) + u^1,$$

где u^1 – произвольный вектор из $\mathfrak{U}^1$. Очевидно выполнение условия (3.2.8), если вектор $u_0 \in \mathfrak{P}_f$, теорема доказана. •

Замечание 3.2.1. В случае (L,p)-ограниченности, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ оператора M начальное условие (3.2.4) эквивалентно условию

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{3.2.9}$$

согласно леммы 1.4.1, непрерывности и построения оператора P.

Замечание 3.2.2. Отметим, что если $(L,0)$-ограничен, то условие (3.2.4) и условие

$$L(u(0) - u_0) = 0, \tag{3.2.10}$$

являются эквивалентными в силу следствия 1.3.3, замечания 3.2.1 и непрерывности оператора L.

Замечание 3.2.3. В случае тривиального ядра оператора L, т.е. $\ker L = \{0\}$, тогда, в силу следствия 1.3.3, существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, и поэтому задачи (3.1.2) и (3.2.10) совпадают.

Замечание 3.2.4. Если пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, а оператор $L = \mathbb{I}$, то условия (3.2.4) и (3.2.5) соответственно совпадают с условием

$$((\mu\mathbb{I} - M)^{-1})^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \text{ где } \ x = u \ \text{ или } \ f,$$

и которое эквивалентно условию совпадает с условием Коши

$$x(0) = x_0.$$

Замечание 3.2.5. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Если изменим условия (3.2.4) и (3.2.5) следующими условиями соответственно

$$[R^L_\alpha(M)]^{p+1}(P(u(0) - u_0)) = 0,$$

$$([L^L_\alpha(M)]^{p+1}(Q(f(0) - f_0)) = 0,$$

тогда мы будем следующие случаи:

1 — если $M(L,p)$-ограничен, и (по замечании 3.2.8 и $P(P(u)=P)$, получим

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(P(u(0)-u_0))=0,$$

эквивалентно условию (3.2.9). Действительно,

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(P(u(0)-u_0))=0\to$$

$$\to P(P(u(0)-u_0))=0\to$$

$$\to P(u(0)-u_0=0.$$

2 — если $M(L,0)$-ограничен, и (по замечании 3.2.1 и 3.2.2), получим

a — если ядро $\ker L=\{0\}$, до в силу следствия 1.3.3 существует L^{-1}, и будем иметь

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(P(u(0)-u_0))=0\to$$

$$\to L(P(u(0)-u_0))=0\to$$

$$\to P(u(0)-u_0)=0\to$$

$$\to L(u(0)-u_0)=0\to$$

$$u(0)=u_0,$$

тогда

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(P(u(0)-u_0)=0$$

эквивалентно условию (3.1.2).

b — если ядро $\ker L\neq\{0\}$, и в силу тождества (1.3.2) и линейностью L, имеем

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(P(u(0)-u_0))=0$$

$$\to L(P(u(0)-u_0))=0$$

$$\to Q(L(u(0)-u_0))=0$$

$$\to Q(f(0)-f_0)=0$$

Аналогично замечание 3.2.1, так как условие (3.2.5) эквивалентно условию $Q(f(0)-f_0)=0$, до $[R^L_\alpha(M)]^{p+1}(P(u(0)-u_0))=0$ эквивалентно задаче Шоуолтера-Сидорова (3.2.5)

3.3. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. На отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ рассмотрим неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u}=Mu+g. \tag{3.3.1}$$

Пусть L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M распадается на две непересекающиеся компоненты, т.е. выполнено условие

$$\sigma^L(M)=\sigma^L_a(M)\cup\sigma^L_b(M) \quad \text{и} \quad \sigma^L_a(M)\cap\sigma^L_b(M)=\emptyset. \tag{3.3.2}$$

Тогда существуют непересекающиеся контуры γ_a и γ_b, ограничивающие области, содержащие соответственно части спектра $\sigma^L_a(M)$ и $\sigma^L_b(M)$. Согласно относительно спектральной теореме [19, 51] в квазибанаховых пространствах последовательностей можно построить спектральные проекторы

$$P_{a(b)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{a(b)}} R^L_\mu(M)\,d\mu \qquad \text{и} \qquad Q_{a(b)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{a(b)}} L^L_\mu(M)\,d\mu.$$

Ясно, что для этих спектральных проекторов выполняются условия $P = P_a + P_b$, $Q = Q_a + Q_b$ и в соответствии с относительно спектральной теоремой подпространства $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}_a \oplus \mathfrak{U}_b$ и $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}_a \oplus \mathfrak{F}_b$ и действия всех операторов также расщепляются.

При выполнении условия (3.3.2) для уравнения (3.3.1) поставим начально-конечные условия [12]

$$P_a(u(a) - u_a) = 0, \qquad P_b(u(b) - u_b) = 0 \tag{3.3.3}$$

с некоторыми элементами $u_a, u_b \in \mathfrak{U}$.

Вектор-функцию $u \in C^1([a,b];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (3.3.1), назовем *решением начально-конечной задачи* (3.3.1), (3.3.3), если она удовлетворяет уравнению (3.3.1), и условиям (3.3.3).

Согласно относительно спектральной теореме [19, 51], уравнение (3.3.1) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} H\dot{u}^0(t) &= u^0(t) + M_0^{-1}L_0 g_0(t), \\ \dot{u}_a^1(t) &= S_a u_a^1(t) + L_a^{-1} g_a(t), \\ \dot{u}_b^1(t) &= S_b u_b^1(t) + L_b^{-1} g_b(t) \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

где операторы $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$; векторы $u_k \in \mathfrak{U}^k$, $g_k \in \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$.

Лемма 3.3.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен ($p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) и L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M удовлетворяют условию* (3.3.2). *Тогда для любой вектор-функции $g^0 \in C^{p+1}([a,b];\mathfrak{F}^0)$ существует единственное решение $u^0 \in C^1([a,b];\mathfrak{U}^0)$ уравнения* (3.3.1), *которое к тому же имеет вид*

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} g^0(t).$$

Доказательство. Подстановкой вектор-функции $u^0 = u^0(t)$ в первое уравнение (3.3.4) убеждаемся в существовании решения. Единственность получается последовательным дифференцированием однородного уравнения (3.3.1) $0 = H^p u^{0(p)} = \ldots = H\dot{u}^0 = u^0$. Лемма доказана. •

Лемма 3.3.2. *В условиях леммы* 3.3.1 *для любого вектора* $u_a \in \mathfrak{U}$ $(u_b \in \mathfrak{U})$ *и для любой вектор-функции* $g_1 \in C([a,b];\mathfrak{F}^1)$ *существует единственное решение* $u_a^1 \in C^1([a,b];\mathfrak{U}_a^1)(u_b^1 \in C^1([a,b];\mathfrak{U}_b^1))$ *задачи* $P_a(u(a) - u_a) = 0$ $(P_b(u(b) - u_b) = 0)$, *для уравнения* (3.3.1), *которое к тому же имеет вид*

$$u_a^1(t) = U^t u_a + \int_a^t U^{t-s} L_a^{-1} g_a^1(s) ds$$

$$\left(u_b^1(t) = U^{t-b} u_b - \int_t^b U^{t-s} L_b^{-1} g_b^1(s) ds \right).$$

Доказательство. Для задачи $P_a(u(a) - u_a) = 0$ существование решения следует из результатов предыдущего параграфа, если за нулевую точку взять точку a. Докажем для $P_b(u(b) - u_b) = 0$. Сначала покажем единственность. С помощью подстановки убедимся, что вектор-функция $u_b^1 = u_b^1(t)$ является решением данной задачи. Пусть $v = v(t)$, $t \in [a,b]$ — другое решение этой задачи. Построим вектор-функцию $w(s,t) = L_b U^{t-s} v(s)$. По построению

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = L_b \frac{\partial U^{t-s}}{\partial s} v(s) + L_b U^{t-s} \frac{\partial v(s)}{\partial s} = 0.$$

Значит, $w(b,t) = w(t,t)$, т.е. $U^{t-b} v(t) - v(t) = 0$.

Подстановкой вектор-функции $u_b^1(t)$ в уравнение (3.3.1) убеждаемся, что она удовлетворяет этому уравнению. Лемма доказана. •

Итак, доказана

Теорема 3.3.1. *Для любых векторов* $u_a, u_b \in \mathfrak{U}$ *и любой вектор-функции* $g : [a,b] \to \mathfrak{F}$*, которая удовлетворяет условиям лемм* 3.3.1, 3.3.2*, существует единственное решение* $u \in C^1([a,b];\mathfrak{U})$ *задачи* (3.3.1), (3.3.3)*, которое к тому же имеет вид* $u(t) = u^0(t) + u_a^1(t) + u_b^1(t)$.

3.4. Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина

Квазисоболевы пространства

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — два квазибанаховых пространства последовательностей. Будем говорить, что:

• $\mathfrak{U}$ вложено в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

• $\mathfrak{U}$ плотно вложено в $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

• $\mathfrak{U}$ плотно и непрерывно вложено в $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ $_q\|u\|_{\mathfrak{U}} \geq C_q\|u\|_{\mathfrak{F}}$, где $C \in \mathbb{R}_+$ — некоторая константа не зависящая от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теперь пусть $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — соболевское пространство, а W_2^{-1} — сопряженное к нему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$ пространство с негативной нормой. Из теоремы вложения Соболева вытекает, что

$$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \tag{3.4.1}$$

Также хорошо известно, что оператор Лапласа $-\Delta$, определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v \rangle = \sum_{m=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает топлинейный изоморфизм :

$$-\Delta \ : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \ \to \ W_2^{-1}(\Omega). \tag{3.4.2}$$

Далее, пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — множество собственных значений оператора Лапласа $-\Delta$, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. Построим пространства:

$$\ell_2^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2 < +\infty \right\},$$

$$\ell_2^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < +\infty \right\}$$

и отметим топлинейные изоморфизмы $\ell_2^1 \cong \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\ell_2^{-1} \cong W_2^{-1}(\Omega)$, а также плотность и непрерывность вложений

$$\ell_2^1 \hookrightarrow \ell_2 \hookrightarrow \ell_2^{-1}, \tag{3.4.3}$$

вытекающие из (3.4.1). Отметим банаховость пространств ℓ_2^1 и ℓ_2^{-1} с нормами $\|u\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$ и $\|v\|_{-1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$ соответственно.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \lambda_k u_k. \tag{3.4.4}$$

Поскольку $\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1$, то из (3.4.4) следует топлинейность изоморфизма $\Lambda : \ell_2^1 \to \ell_2^{-1}$, который, впрочем, легко получить из (3.4.2), (3.4.3). Обратный к Λ оператор (квазиоператор Грина Λ^{-1}) задается формулой

$$\Lambda^{-1} v = \lambda_k^{-1} v_k. \tag{3.4.5}$$

Данная часть посвящена перенесению описанной выше идеологии на квазибанаховы пространства ℓ_p, $p \in (0,1)$. Построим квазисобо-

левы пространства:

$$\ell_p^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/2} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

$$\ell_p^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, а $p \in (0,1)$.

По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$\overset{m}{p}\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p \right)^{1/p},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$, то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Теорема 3.4.1. *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \le m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.*

Доказательство. Вложение $\ell_p^m \subset \ell_p^l$ очевидно. Докажем плотность вложения. Пусть $u \in \ell_p$, тогда рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, где

$$u_1 = (u^1, 0, 0, \ldots),\ u_2 = (u^1, u^2, 0, 0, \ldots),\ \ldots$$

$$\ldots,\ u_k = (u^1, u^2, \ldots, u^k, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

Очевидно, $\{u_k\} \subset \ell_p^m$, причем $u_k \to u$ в квазинорме l_p^l. Непрерывность вложения тоже очевидна.•

Теорема 3.4.2. *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ — топлинейный изоморфизм.*

Доказательство. Непрерывность оператора Λ очевидна –

$$ {}_p^m\|\Lambda u\| \;=\; \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)-1}|u_k|^p\right)^{1/p} = {}_p^{m+2}\|u\|. $$

Построим обратный оператор $\Lambda^{-1}u = \lambda_k^{-1}u_k$ (квазиоператор Грина). Очевидно, $\Lambda\Lambda^{-1}u = u$ при всех $u \in \ell_p^{-1}$, и $\Lambda^{-1}\Lambda u = u$ при всех $u \in \ell_p^m$. Далее,

$$ {}_p^{m+2}\|\Lambda^{-1}u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(m/2)+1}|u_k|^p\right)^{1/p} = {}_p^m\|u\|.\bullet $$

3.5. Уравнение Баренблата–Желтова–Кочиной

Пусть $\mathfrak{U} = \ell_p^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_p^m$, операторы L, M зададим формулами $L = \lambda - \Lambda$, $M = \alpha\Lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ — некоторые константы.

Лемма 3.5.1. *Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(\ell_q^{m+2}; \ell_q^m)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.4.2 оператора Лапласа Λ, определенный в (3.4.4), линеен и непрерывен.

Следовательно, операторы L и M по определению принадлежат пространству $\mathcal{L}(\ell_p^{m+2}; \ell_p^m)$. •

Лемма 3.5.2. *Для любого* $\lambda \notin \sigma(\Lambda)$ *существует оператор* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_q^m; \ell_q^{m+2})$.

Доказательство. Утверждение следует из формулы определения оператора $L = \lambda - \Lambda$ и свойства оператора. •

Теорема 3.5.1. *Для любых* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *оператор* M $(L, 0)$*-ограничен.*

Доказательство. Если $\lambda \notin \sigma^L(M)$, то утверждение следует из леммы 3.5.2, замечания 1.2.2 и формулы (1.3.5). Пусть $\lambda \in \sigma^L(M)$, положим $\ker L = span\{\varphi_k, \lambda = \lambda_k\}$. Тогда, если $\sum\limits_{\lambda=\lambda_k} |c_k| > 0$, имеем

$$\psi = \sum_{\lambda=\lambda_k} c_k M \varphi_k \notin \mathrm{im} L.$$

Отсюда в силу следствия 3.5.2 и теоремы 1.4.1 следует утверждение теоремы. Поскольку L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек

$$\left\{ \mu_k = \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}, \tag{3.5.1}$$

то оператор M (L, σ)-ограничен, и

$$\mathfrak{U}^0 = \begin{cases} \{\mathbf{0}\}, \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} :\ u_k = 0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \text{если } \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} :\ u_l = 0,\ \lambda_l = \lambda\}. \end{cases}$$

Подпространства $\mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$ определяется аналогично.

Действительно, как нетрудно показать при всех $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, оператор $H = \mathbb{O}$, и следовательно, оператор M $(L, 0)$-ограничен. •

Пример 3.5.1. Рассмотрим квазиоператор Грина $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_p^m; \ell_p^{m+2})$ как оператор $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(\ell_p^m; \ell_p^m)$, что возможно в силу аналога теорем вложения Соболева.

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \ell_p^m$, оператор $L = \Lambda^{-1}$, $M = \mathbb{I}$ — единичный оператор на ℓ_p^m. Поскольку L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M в этом случае состоит из точек $\{\lambda_k\}$, то оператор M не является (L, σ)-ограниченным.

Пример 3.5.1 устанавливает тот факт, что не все операторы относительно σ-ограничены.

Рассмотрим аналог уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной как одного из наиболее известных из неклассических уравнений математический физики [47]

$$(\lambda - \Lambda)\dot{u} = \alpha \Lambda u. \tag{3.5.2}$$

Как нетрудно показать, голоморфная разрешающая группа уравнения (3.5.2) будет имеет вид

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, \text{ если } \lambda \notin \lambda_k, k \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, \text{ если существует } \ l \in \mathbb{N} : \lambda = \lambda_l. \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}$ – такой L-спектра оператора M, последовательность $u_{0k} = u_0 \in \ell_q^{m+2}$, векторы $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (3.5.2) будет множество $\mathfrak{U}^1$ из доказательства теоремы 3.5.1.

Перейдем к рассмотрению аналога неоднородного уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)u_t = \alpha \Lambda u + f. \tag{3.5.3}$$

В силу теорем 3.1.1 и 3.5.1 справедливо следующее

Следствие 3.5.1. *Пусть* $0 \in [a,b]$, *тогда для любых* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in C^\infty([a,b];\ell_q^m)$ *и любых*

$$u_0 \in \left\{u \in \ell_q^{m+2} : u = -M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f(0)\right\},$$

существует единственное решение $u \in C^\infty([a,b];\ell_q^{m+2})$ *задачи* (3.5.3), (3.1.2), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f(t) + U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)ds.$$

Перейдем к рассмотрению задачи Шоуолтера–Сидорова [46]. Условие (3.2.4) в данном случае удобно взять в виде (3.2.9), где проектор

$$Pu = \begin{cases} \{u_k\}, & \text{если } \lambda \notin \lambda_k, k \in \mathbb{N}; \\ \{(u_k : k \in \mathbb{N}\backslash\{\lambda = \lambda_l\}) & \text{и } \ (u_l : \lambda = \lambda_l)\} \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Тогда в силу теорем 3.2.1 и 3.5.1 справедливо следующее

Следствие 3.5.2. *Пусть* $0 \in [a,b]$, *тогда при любых* $\lambda, m \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^1([a,b];\ell_q^m)$ *и* $u_0 \in \ell_q^{m+2}$ *существует единственное решение* $u \in C^1([a,b];\ell_q^{m+2})$ *задачи* (3.5.3), (3.2.4), *где проектор* P *задан формулой* (3.5.4).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$. Согласно теоремы 3.2.1, существует единственное решение $u = u(t)$, $t \in [a,b]$, задачи (3.5.3), (3.2.4) при любых $f \in C^{+1}([a,b];\ell_q^m)$ и любых $u_0 \in \ell_q^{m+2}$. Также, в силу замечания 3.2.3 и проведенных выше построении условие (3.2.3) эквивалентно условию (3.2.8), где проектор P задан формулой (3.5.4). •

Наконец, рассмотрим начально-конечную задачу (3.3.3) для уравнения (3.5.3). Так как L-спектр оператора M имеет вид (3.5.1), то он дискретен и имеет только одну точку "накопления": $-\alpha$. В силу этого всегда можно выбрать части спектра, удовлетворяющие условию (3.3.1). Соответственно, проекторы будут иметь вид (3.5.4), где элементы последовательности выбираются по выделенным индексам.

В силу всего этого, а также теорем 3.3.1 и 3.5.1 справедливо

Следствие 3.5.3. *Для любых векторов $u_a, u_b \in \ell_q^{m+2}$ и любой вектор-функции $f : [a,b] \to \ell_q^m$, удовлетворяющей условиям*

$$(\mathbb{I} - Q)f \in C^1([a,b]; \ell_q^m) \quad \text{и} \quad Qf \in C([a,b]; \ell_q^m),$$

существует единственное решение $u \in C^1([a,b]; \ell_q^{m+2})$ задачи (3.5.3), (3.3.3)*, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f(t) + U^{t-a}u_a - U^{b-t}u_b +$$
$$+ \int_a^t U^{t-s}L_1^{-1}Q_a f(s)ds - \int_t^b U^{t-s}L_1^{-1}Q_b f(s)ds.$$

Список литературы

[1] *Александров, А.Б.* Квазиномированные пространства в комплексном анализе: дис. ... док. физ-мат. наук / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.

[2] *Балакришнан, А.В.* Прикладной функциональной анализ / А.В. Балакришнан. – М.: Наука, 1980.

[3] *Баскаков, А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, 3. – С. 1–11.

[4] *Баскаков, А.Г.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, 11. — С. 3–35.

[5] *Баренблатт, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, 5. — С. 852–864.

[6] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрем. — М.: Мир, 1980.

[7] *Березанский, Ю.М.* Разложение по собственным функцияи самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965.

[8] *Васильев, В.В.* Полугруппы операторов, косинус оператор–функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.

[9] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, 7. — С. 31–42.

[10] *Далецкий, Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — Москва: Наука, 1970.

[11] *Забрейко, П.П.* Об одном классе полугрупп / П.П. Забрейко // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, 5. — С. 934–937.

[12] *Загребина, С.А.* Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, 2. — С. 5–24.

[13] *Загребина, С.А.* Устойчивость в моделях Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Москвичева. — Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[14] *Замышляева, А.А.* Линейные уравнения соболевского типа выского порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[15] *Зубова, С.П.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышев // Дифференц. уравнения и их применение. – 1976. – 14. – С.21–39.

[16] *Иванов, В.В.* Полугруппы линейных операторов в локально выпуклом пространстве / В.В. Иванов. – Новосибирск: Наука, 1977. – С. 121–153.

[17] *Иванов, В.В.* Равномерно суммируемые полугруппы операторов. II. Порождение полугрупп / В.В. Иванов // Тр. Ин-та математики СО РАН. – Т. 7. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 117–131.

[18] *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972.

[19] *Келлер, А.В.* Относительно спектральная теорема / А.В. Келлер // Вестник Челяб. гос. университета. Сер. Матем. Мех. — 1996. — 1 (3). — С. 62–66.

[20] *Клемент, Ф.* Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М.: Мир, 1992.

[21] *Костин, А.В.* К теории функциональных пространств Степанова / А.В. Костин, В.А. Костин. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2007.

[22] *Костин, В.А.* К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп / В.А. Костин // Алгебра и анализ. — 1999. — Т. 11, вып. 1. — С. 118–140.

[23] *Костин, В.А.* Элементарные полугруппы преобразований и производящие их уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // ДАН. — 2014. — Т. 455, 2. — С. 1–4.

[24] *Костин, В.А.* Эволюционные уравнения с особенностями в обобщенных пространствах Степанова / В.А. Костин, С.В. Писарева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — 6. — С. 35–44.

[25] *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967.

[26] *Крейн, С.Г.* Функции Ляпунова и задачи Коши для некоторых систем уравнений в частных производных / С.Г. Крейн, В.Б. Осипов // Дифференц. уравнения. — 1970. — Т. 6, 11. — С. 2053–2061.

[27] *Крепкогорский, В.Л.* Квазиномированные пространства функций, рационально аппроксимируемых в норме BMO / В.Л. Крепкогорский // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1990. — 3.— С. 38–44.

[28] *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973.

[29] *Манакова, Н.А.* Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[30] *Мельникова, И.В.* Об однопараметрических группах операторов в локально выпуклых пространствах / И.В. Мельникова // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. XXVI, 6. — С. 167–170.

[31] *Мельникова, И.В.* Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений / И.В. Мельникова // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, 4. — С. 892–910.

[32] *Мельникова, И.В.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, 6. — С. 111–150.

[33] *Мухамадиев, Э.М.* Об оценке спектрального радиуса одного оператора, связанного с уравнениями нейтрального типа / Э.М. Мухамадиев // Математические заметки. — 1973. — Т. 13, вып. 1. — С. 67–78.

[34] *Новиков, С.Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных прпространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 4. — С. 549–563.

[35] *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975.

[36] *Руткас, А.Г.* Спектральный анализ и вопросы разрешимости операторно-дифференциальных уравнений / А.Г. Руткас // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 4. — С. 161.

[37] *Руткас, А.Г.* Спектральные методы исследования вырожденных дифференциально-операторных уравнений / А.Г. Руткас // Современная математика и ее приложения, том 35: Труды весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XIV Воронеж, 2003. Часть 2. — Тбилиси, 2005. — С. 48–64.

[38] *Сагадеева, М.А.* Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — 18. — С. 45–56.

[39] *Сагадеева, М.А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[40] *Сапронов, Ю.И.* Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов. — Воронеж, 2012.

[41] *Свешников, А.Г.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М., 2007.

[42] *Свиридюк, Г.А.* Задачи Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, 12. — С. 2169–2171.

[43] *Свиридюк, Г.А.* К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, 4. — С. 47–74.

[44] *Свиридюк, Г.А.* Фазовые пространства полулинейных уравений типа Соболева с относительно сильно секториальным опкратором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. — 1994. — Т. 6, 5. — С. 252–272.

[45] *Свиридюк, Г.А.* Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывнные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // ДАН. — 1994. — Т. 337, 5. — С. 581–584.

[46] *Свиридюк, Г.А.* Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2012. — 1. — С. 104–125.

[47] *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модель математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — 40 (299). — С. 7–18.

[48] *Трибель, Х.* Теория интерполяций. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М.: Мир, 1980.

[49] *Федоров, В.Е.* Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, 8. — С. 131–160.

[50] *Федоров, В.Е.* Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... докт. физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005.

[51] *Хасан, Ф.Л.* Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014. — Воронеж, 2014. — С. 393–396.

[52] *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985.

[53] *Хилле, Е.* Функциональный анализ и полугруппы / Е. Хилле, Р. Филлипс. — М.: ИЛ, 1962.

[54] *Чшиев, А.Г.* Спектральный анализ вырожденных полугрупп операторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Г. Чшиев. – Воронеж, 2011.

[55] *Шестаков, А.Л.* Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — 1. — С. 107–115.

[56] *Adams, R.* Sobolev space / R. Adams. — New York, London, 1975.

[57] *Aliprantis, C.* Principles of real anlysis / C. Aliprantis, O. Burkinshaw. — Elsevier North Holland, Inc, 1998

[58] *Al'shin, A.B.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. — Berlin: de Gruyter, 2011.

[59] *Arendt, W.* Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt // Israel J. Math. — 1987. — V. 59. — P. 327–352.

[60] *Aubin, J.* Applied abstract analysis / J. Aubin. — New York: John Willy and sons, Inc, 1977.

[61] *Bachman, G.* Functional Analysis / G. Bachman, L. Narici. — New York, London: Academic press, Inc, 1966.

[62] *Balakrishan, A.* Applied Functional analysis / A. Balakrishan. — New York: Springer-Velag, Inc, 1976.

[63] *Bastero, J.* An extention of Milmans Reverse Burn–Minkowski inequality / J. Bastero, J. Bernuès, A. Péna // Math. & Func. Anal. — 1995. — V. 1. — P. 950–1210.

[64] *Berberian, S.* Lectures in Functional analysis and operator theory / S. Berberian. — New York: Springer-Velag, Inc, 1974.

[65] *Choudary, B.* Functional Analysis with application / B. Choudary, N. Sudarsan. — India: Willy easem limited, 1989.

[66] *Curtain, R.F.* Functional analysis in Modern applied mathematics / R.F. Curtain, A.J. Pritchard. — London: Academic Press, Inc, 1977.

[67] *De Laubenfelds, R.* Integrated semigroups, C-semigroups and the abstract Cauchy problem / R. de Laubenfelds // Semigroup Forum. — 1990. — V. 41. — P. 83–95.

[68] *Demidenko, G.V.* Partial differential equation and systems not solvable with respect to the highest–order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. — New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

[69] *Favini, A.* Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rend. Mat. — 1979. — V. 12, 3-4. — P. 511–536.

[70] *Favini, A.* An operational method for abstract degenerate evolution equations of hiperbolic type / A. Favini // J. Funct. Anal. — 1988. — V. 76. — P. 432–456.

[71] *Favini, A.* Degenerate differential equation in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York etc.: Marcel Dekker Inc. — 1999.

[72] *Gupta, K.* Topology / K. Gupta. — Delhi, 2000.

[73] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, 4. — P. 448–454.

[74] *Heuser, H.G.* Functional analysis / H.G. Heuser. — New York: John Wiley and sons, Ltd, 1982.

[75] *Hewit, E.* Real and abstract analysis / E. Hewit, K. Stromberg. — New York: Springer-Velag, Inc, 1975.

[76] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam etc.: Elsevier, 2003. — P. 1099–1130.

[77] *Kantorovich, L.V.* Functional Analysis / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. — Oxford: Program Press Ltd. Heading Hill Hall, 1982.

[78] *Kellerman, H.* Integrated semigroups / H. Kellerman, M. Hieber // J. Funct. Anal. — 1989. — V. 84. — P. 160–180.

[79] *Kelley, J.* General topology / J. Kelley. — Springer, 1775.

[80] *Keyfitz, N.* Applied mathematical demography / N. Keyfitz. — New York: John Wiley and sons, Inc, 1977.

[81] *Komatsu, H.* Semi-group of operators in locally convex spaces / H. Komatsu // J. Math. Soc. Japan. — 1964. — V. 16. — P. 230–262.

[82] *Komura, T.* Semigroups of operators in locally convex spaces / T. Komura // Anal. — 1968. — V. 2. — P. 252–296.

[83] *Kreyszig, E.* Introductory functional analysis with applications / E. Kreyszig. — New York: John Willy and sons, Inc, 1989.

[84] *Kufner, A.* Function space / A. Kufner, J. Oldrich, S. Fucik. — Academia, Spriniger, 1977.

[85] *Leslie, P.H.* On the use of matrices in certain population mathematies / P.H. Leslie // Biometrika. — 1954. — V. 33. — P. 183–212.

[86] *Liusternik, L.A.* Element of functional Analysis / L.A. Liusternik, V.J. Sobolev. — New York: Fredriek Ungar publishing Co, 1961.

[87] *Maddox, I.J.* Elements of functional analysis / I.J. Maddox. — New Delhi: Cambridge university press, 1988.

[88] *Melnikova, I.V.* The Cauchy problem. Three approaches Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov. — London, New York, Washington, 2001.

[89] *Obayashi, H.* On a generation theorem of groups of operators in locally convex spaces / H. Obayashi // Mem. Kanazawa Inst. Technol. — 1979. — 12. — P. 5–10.

[90] *Ouchi, S.* Semi-groups of operators in locally convex spaces / S. Ouchi // J.Math. Soc. Japan. — 1973. — V. 25, 2. — P. 265–276.

[91] *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. — New York etc.: Springer, 1983.

[92] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. — Warsaw: PWN, 1985.

[93] *Rorres, C.* Application of linear algebra / C. Rorres, H. Anton. — New York: John Wiley and sons, Inc, 1977.

[94] *Schwartz, L.* Lectures on mixed problems in partial differential equations and representation of semi-groups / L. Schwartz. — Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[95] *Sharama, J.* Functional analysis / J. Sharama. – New Delhi: Meerut cooge, 1990.

[96] *Showalter, R.E.* The Sobolev type equation I / R.E. Showalter // Appl. Anal. — 1975. — V.5, 1. — P. 15–22.

[97] *Siddiqi, A.* Functional analysis with applications / A. Siddiqi. – New Delhi: MacGraw-Hill, Inc., 1986.

[98] *Sidorov, N.* Lyapunov–Shmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[99] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.

[100] *Sykes, Z.M.* On discrete stable population theory / Z.M. Sykes // Biometrics. — 1969. — V. 25. — P. 285–293.

[101] *Taylor, A.* Introduction to Functional Analysis / A. Taylor. — Springer Verlag, 1980.

[102] *Yagi, A.* Generation theorems of semigroups for multivalued linear operators / A. Yagi // Osaka J. Math. — 1991. — V. 28. — P. 385–410.

[103] *Yosida, K.* Functional Analysis / K. Yosida. — New York, London, 1978.

Публикации автора по теме диссертации

[104] *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2013. — 2 (13). — С. 13–16.

[105] *Аль-Делфи Дж.К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, 1. – С. 107–109.

[106] *Келлер, А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, 1. – С. 20–27.

[107] *Свиридюк, Г.А.* Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Математические заметки СВФУ. — 2013. — Т. 20, 2. — С. 180–185.

[108] *Al-Delfi, J.K.* Quasi-Banach Space for the Sequence Space l_p, where $0 < p < 1$ / J.K. Al-Delfi // Jornal of College of Education, Al-Mustansiriyah University (Iraq–Baghdad). Mathematics. — 2007. — 3. — P. 285–295.

Тезисы и материалы конференций

[109] *Аль-Делфи, Дж.К.* Модель Баренблатта–Желтова–Кочной с условием Коши в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014. — Воронеж, 2014. — С. 14–17.

[110] *Аль-Делфи, Дж.К.* Задача Шоуолтера–Сидорова в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всеросс. научн. конф. — Челябинск, 2014. — С. 180–181.

[111] *Аль-Делфи, Дж.К.* Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной с условием Шоуолтера–Сидорова в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи, Г.А. Свиридюк // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, Россия, 4 – 9 июля 2014 г.: тез. докл. — М: МИАН, 2014. — С. 153—154.

[112] *Свиридюк, Г.А.* Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Дифференциальные уравнения. Функцональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева; Мин-во образования и науки РФ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибиск, 2013. — С. 247.